REGLAS DE CÁLCULO

TEORÍA Y MANEJO

Para Principiantes y Profesionales

927 Ejercicios Resueltos

170 Dibujos

Quinta Edición

(Con teoría de logaritmos)

Diódoro Velázquez Gómez

INSTRUCCIONES PARA MANEJAR CUALQUIER REGLA DE CALCULO

(Con más de 900 ejercicios resueltos y 170 dibujos)

INDICE

Prólogo 1

I.—LAS REGLAS DE CALCULO

Descripción 3
Uso de las escalas 4

II.—TECNICA

Graduación de las escalas 7
Lectura de los valores 9

III.—OPERACIONES

Multiplicación con las escalas C y D 11
Productos exactos (complemento aritmético) ... 13
Situación del punto decimal en la multiplicación.. 14
Multiplicaciones sucesivas de tres o más factores. 15
Multiplicación con la escala recíproca CI 16
División con las escalas C y D 18
Colocación del punto decimal en la división 19
División con las escalas A y B 20
Operaciones combinadas. Multiplicación y división 21
Proporciones 22
Cuadrados de los números 25
Regla especial para obtener exactamente los cuadrados de los números 26
Raíz cuadrada 29
Cubo de los números 30
Raíz cúbica 33
Potencias fraccionarias: $a^{3/2}$ y $a^{2/3}$ 35
Cuarta potencia de los números 36
Raíz cuarta 37
Valores recíprocos. (Escala CI).

$$\frac{1}{a};\ \frac{1}{a^2};\ \frac{1}{\sqrt{a}};\ \frac{1}{a^3};\ \frac{1}{\sqrt[3]{a}} \quad \ldots\ldots 38$$

Uso de las escalas CF, DF = (Dπ) y CIF 45

(Operaciones: $a\pi$; a/π; π/a; $\pi\sqrt{a}$; $\pi\sqrt[3]{a}$) 46

Operaciones combinadas con potencias y raíces: $(ab^2$; a/b^2; a^2/b; a^2b^2; a^3/b^2; $\sqrt{ab}$; a^2/b^2; $\sqrt{a \div b}$; $a \div \sqrt{b}$; $\sqrt{a}/b$; $\sqrt{\pi}/a)$ 48

Uso de la escala logarítmica L.
(Logaritmos, antilogaritmos, cologaritmos) ... 49
Operaciones con logaritmos. Ecuaciones exponenciales de la forma: $a^x=b$
(Resolución por tablas de logaritmos) 53
Las escalas trigonométricas. Valores naturales y valores logarítmicos de las funciones trigonométricas 56

IV.—PROCEDIMIENTOS ESPECIALES
(Mayor aproximación en los resultados)

Conversión de grados en radiantes 61
Valores del coseno de un ángulo comprendido entre 0° y 10° (seno de 80° a 90°). Aproximación hasta cinco cifras decimales. (Primer procedimiento) 62
Conversión sexagesimal a centesimal 63
Obtención del ángulo, conocido el valor de la función 64
Angulos mayores de 90°. Fórmula para reducir a un valor menor de 90° 66
Signos de funciones trigonométricas en los cuatro cuadrantes 66
El cálculo diferencial en la regla de cálculo 68
Aproximación de las raíces cuadradas hasta cinco cifras usando cualquier regla de cálculo 70
Cálculo del TEOREMA DE PITAGORAS 73
Cálculo de la Fórmula de la Resonancia 77

V.—ESCALAS LOG. LOG.
(Operaciones)

10^a, 100^a y 1000^a potencias 80
Raíces de índice 10, 100 y 1000 80
Potencias de e (2.718...). Exponente positivo ... 80
Raíces de e (2.718...). 81
Potencias de e (exponente negativo) 82
Ecuaciones exponenciales de la forma: $e^x=a$.... 82
LOGARITMOS NATURALES O NEPERIANOS ($\log_n$ ó $\log_e$) de números comprendidos entre 1.001 y 22 000 83
Antilogaritmos naturales (antilog$_e$) 83

Ecuaciones de la forma: $\sqrt[x]{e}=a$ 84
Potencias de los números (exponente entero o decimal) 84
Extracción de raíces de cualquier índice 86
Raíces de cantidades no contenidas en las escalas Log. Log. 88
Potencias de cantidades no contenidas en las escalas Log. Log. 88
Combinación de potencias y raíces. (Exponentes fraccionarios) 88
Potencias con exponentes negativos 91
Ecuaciones exponenciales de la forma: $a^x=b$... 92
LOGARITMOS DE SISTEMA DE CUALQUIER BASE. Logaritmos de base **10** de números comprendidos entre 1001 y 2000, con aproximación hasta cinco cifras decimales 99
USO DE LAS ESCALAS LL_0 y LL_{00} (Inversas) Potencias del número **e** (2.718...) con exponente negativo desde —0.001 hasta —10 ... 101
Logaritmos naturales o hiperbólicos (de base **e**) de los números comprendidos entre 0.00005 y 0.999 102
Ecuaciones exponenciales de la forma: $e^x=a$, cuando **a** es **menor** que 1 104
Potencia 100 y raíz 100 de números menores que 1 105
Potencias de números menores que **1** 106
Potencias fraccionarias de números fraccionarios 107
Raíces de números fraccionarios menores que **1**. 108
Potencias de números no incluídos en las escalas LL_0 y LL_{00} 108
Raíces de números no incluídos en las escalas LL_0 y LL_{00} 109
Logaritmos comunes o vulgares (de base 10) de números comprendidos entre 9 y 9977 (aproximación hasta cinco cifras decimales) 109
Valores del coseno de un ángulo comprendido entre 0° y 10° (seno de 80° a 90°) 111
Valores de: sen^2x 112

Valores del coseno de un ángulo comprendido entre 0° y 10° (seno de 80° a 90°).
(Tercer procedimiento, combinando el Teorema de Taylor y Maclaurin y la regla de cálculo) . 113
Obtención del ángulo correspondiente a una función dada 114
SECANTE NATURAL. Aproximación hasta seis cifras decimales 115

VI.—PROBLEMAS VARIOS

1) HORMIGON ARMADO. Cálculo del **Momento Flector M** 116
2) Caída libre de los cuerpos 117
3) Velocidad en caída libre 117
4) Iluminación 118
5) Indice de Refracción. (Ley de Snell o de Descartes) 118
6) Cálculo rápido de la LEY DE OHM 119
7) **GUIA DE OPERACIONES.** (Tablas) 120
(APLICACIONES EN **ELECTRICIDAD, RADIO-TELEVISION**).
Suma de resistencias en paralelo. (Recíproca de la suma de dos recíprocos). (Op. 145 y 145 A) 121
Distancia focal de los espejos cóncavos. (Op. 146) 121
Suma de dos recíprocos. (Op. 146 A) 121
Recíproca de la diferencia de dos recíprocos. (Op. 147) 121
Conversión de cantidad compleja (a+bi ó a+jb) en vector polar o viceversa 122
a+jb cuando a es mayor que b. (Op. 254 y 255) 122
a+jb cuando a es menor que b. (Op. 256 y 257) 122
—a+jb cuando a es mayor que b. (Op. 258 y 259) 123
—a+jb cuando a es menor que b. (Op. 260 y 261) 123
—a—jb cuando a es mayor que b. (Op. 262 y 263) 123
—a—jb cuando a es menor que b. (Op. 264 y 265) 124
a—jb cuando a es mayor que b. (Op. 266 y 267) 124
a—jb cuando a es menor que b. (Op. 268 y 269) 124
Rombo. Obtención de la diagonal. (Op. 270) 125
Suma de dos vectores 125
Resta de dos vectores 126

REGLAS DE CALCULO

TEORIA Y MANEJO

por

DIODORO VELASQUEZ GOMEZ
Jefe de Clases de Matemáticas en las Escuelas Secundarias
Profesor de Matemáticas en Escuelas Secundarias y Superiores

Miembro Fundador de la
SOCIEDAD MEXICANA DE FISICA
Miembro de la SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA
(Derechos reservados conforme a la ley. Prohibida la reproducción parcial o total)

PROLOGO DEL AUTOR

La aplicación de las matemáticas ha evolucionado en los últimos años con gran rapidez como consecuencia de una necesidad cada vez mayor de ejecutar las operaciones en el menor tiempo posible. Por muy elevados estudios que un especialista haya hecho, debe adquirir la suficiente práctica en los cálculos, especialmente desde el principio de su carrera.

La regla de cálculo es uno de los instrumentos más accesibles y su uso va popularizándose cada vez más, tanto entre los mismos ingenieros como entre las demás personas que tienen necesidad de ejecutar constantemente cálculos numéricos, como contadores, electricistas, radiotécnicos, etc.

Sin embargo, actualmente la regla de cálculo no ha sido comprendida como es debido a causa de las dificultades técnicas y prácticas con que las personas no preparadas para usarlas han tropezado. Y esto se debe a que las instrucciones que hasta la fecha se han publicado para su uso no han sido verdaderamente accesibles a la mayoría, pues las explicaciones son teóricas y demasiado técnicas. Por esta razón en el

presente libro el lector encontrará las explicaciones expuestas de la manera más sencilla posible y cada ejemplo irá acompañado de un dibujo. Es así, gráficamente, como podrá dominarse el manejo de la regla de cálculo.

Por otra parte, en virtud de que en algunas operaciones generalmente los resultados son sólo aproximados a tres cifras, lo cual en muchos casos no basta para obtener la solución requerida, en esta obra se encontrarán reglas especiales que puedan aplicarse con facilidad y rapidez para obtener los resultados exactos, así como fórmulas que no se habían aplicado hasta la fecha. Por ejemplo, para obtener el producto de $93 \times 82 = 7626$ *el calculista sabe de antemano que la terminación es 6, pero no puede afirmar si la cifra de las decenas es 2 ó 3 o quizás 1, y podría darle el valor de 7616 ó 7636, pues los pequeños espacios que se encuentran entre las subdivisiones, principalmente los de la derecha de las escalas, no pueden ser apreciados por el ojo humano. Lo mismo podría decirse si se tratara de obtener, por ejemplo,* $84^2 = 7056$, *y así otros valores, los cuales podrán siempre calcularse con exactitud aun en las reglas de cálculo de bolsillo, siguiendo nuevos procedimientos.*

También es muy difícil la lectura de los valores naturales del seno de ángulos próximos a 90° (coseno de ángulos pequeños), pero en este caso he encontrado una manera sencilla y práctica para obtenerlos con una aproximación hasta de cinco y seis cifras decimales, basándome en los teoremas de Taylor y Maclaurin, para lo cual basta utilizar únicamente las escalas A, B y C.

Aplico, asimismo, el cálculo diferencial para obtener mayor aproximación en las raíces cuadradas.

Agrego también un procedimiento especial para resolver el Teorema de Pitágoras, que tan necesario es en Geometría, así como para obtener la impedancia (Z) en problemas de radio. El cálculo se ejecuta utilizando las escalas trigonométricas S y T en combinación con las escalas D, C y CI.

La Fórmula de Thomson para calcular la INDUCTANCIA también puede resolverse con facilidad y rapidez por regla de cálculo y con un solo movimiento de la reglilla.

No está por demás hacer notar la importancia que tiene un dibujo bien claro, por lo que se han tenido en cuenta las

subdivisiones de las reglas de cálculo de bolsillo, pues siendo en menor número a las de las de escritorio las separaciones son más distantes y, por consiguiente, el dibujo es menos complicado. De todas maneras las instrucciones y las figuras se aplican indistintamente a todas las reglas de cálculo, entre las cuales podemos citar las siguientes: Mannheim, Duplex Polifásica de Keuffel & Esser, "Nestler", Eléctrica "Faber", Post Trig de la casa Frederick Post, las reglas Lawrence, la regla de 24 escalas "Velásquez", etc.

Los capítulos de que se compone la obra completa REGLAS DE CALCULO son: I.–Las Reglas de Cálculo. II.–Técnica. III.–Operaciones. IV.–Procedimientos especiales. V.–Las escalas LL. VI.–Problemas Varios.

I. LAS REGLAS DE CALCULO

1) Descripción: La regla de cálculo es una tabla de logaritmos, cuyos valores están representados gráficamente por longitudes proporcionales a su magnitud. La regla de cálculo moderna se ha simplificado de manera que sea más fácil y rápido su manejo, considerando mayor número de escalas, con lo que se logra obtener con bastante exactitud los resultados de un sinnúmero de operaciones y problemas prácticos, como multiplicaciones, divisiones, potencias, raíces, operaciones de tanto por ciento, problemas de regla de tres, interés compuesto, anualidades de amortización, valores recíprocos, áreas, cálculos de Hidráulica, caída de potencial, rendimiento útil y potencia eléctrica de una dínamo, cálculo de temperaturas, ecuaciones de 2º grado, ecuaciones con potencias fraccionarias, ecuaciones exponenciales, Topografía, Construcciones, Radio, Electricidad, etc.; logaritmos de base 10, antilogaritmos, cologaritmos; logaritmos neperianos; problemas trigonométricos, de aviación, etc.

La regla de cálculo consta de tres partes: la **regla**, que es la mayor, tiene en el centro una ranura longitudinal; la **reglilla**, que encaja en dicha ranura y que puede deslizarse de uno a otro lado, y el cursor (o corredera),

que es de celuloide o material plástico transparente, y que se desliza igualmente en ambos sentidos.

2) Las escalas. Su uso:

Escalas C y D. Estas escalas deben considerarse como fundamentales en toda regla de cálculo. Son exactamente iguales, encontrándose la escala D en la regla y la escala C en la reglilla, y representan valores de 1 a 10. Su uso más frecuente es en problemas de multiplicación, división, proporciones (regla de tres simple) y combinadas con las escalas A o B se obtienen cuadrados y raíces cuadradas; con la escala L proporcionan las mantisas de los logaritmos. Se relacionan también con las escalas trigonométricas para obtener los valores naturales de las funciones. La escala C, combinada con las escalas Log Log, da los valores de potencias y raíces de cualquier exponente y cualquier índice: Las escalas C y D también se relacionan con las escalas "eléctricas" para resolver problemas de rendimiento útil y potencia eléctrica de una dínamo, así como problemas de caída de potencial. (Escalas de la Regla de Cálculo "Velásquez").

Escalas A y B. También estas escalas deben considerarse como fundamentales, y son, asimismo, iguales. Representan valores de 1 a 10 y de 10 a 100, considerados dentro de dos partes principales, siendo cada una de ellas una mitad de las escalas C o D, que pueden nombrarse "mitad izquierda" A_1 o B_1 y la "mitad derecha" A_2 o B_2. Las escalas A y B se usan también para multiplicaciones, divisiones, proporciones, etc. En la regla de cálculo "eléctrica" Fáber se relacionan con las escalas V y W para resolver problemas de electricidad. También se combinan con la escala Fkc de la Regla de Cálculo de 24 escalas "Velásquez" para obtener uno de los tres valores de la fórmula de la resonancia: $Fkc = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

Escala CI. Esta escala es la C invertida, y en algunas reglas de cálculo está impresa en color rojo, como en las reglas de la Casa Keuffel & Esser y de la Frederick Post, y en la regla Nestler Nº 11 ZR, y algunas otras. La escala CI es muy útil para obtener los recíprocos de los números con ayuda de la escala C y también con la

escala D, pero en este segundo caso siempre que la reglilla esté en su posición original. En combinación con la escala L (logarítmica) se obtienen los cologaritmos de los números. Relacionada con las escalas trigonométricas seno y tangente, se obtienen los valores naturales de las funciones recíprocas cosecante y cotangente; pero siempre que las escalas S y T encuentren sus valores naturales en las escalas C o D.

Las escalas A, B, C, D y CI se encuentran en la mayoría de las reglas de cálculo. Fig. 1.

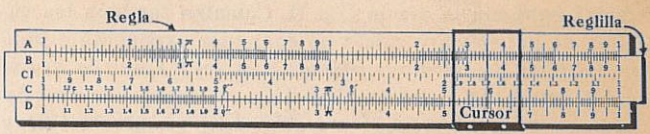


Fig. 1

Escalas CF y DF o Dπ. Estas escalas se encuentran desplazadas con relación a las escalas C y D en un valor igual a π, o sea 3.1416. Con estas escalas pueden multiplicarse o dividirse por π, así como obtener los valores $\pi\sqrt{n}$ y $\pi\sqrt[3]{n}$, en este caso relacionando con las escalas A y K (cúbica). Otro uso muy común de estas escalas es multiplicar varios factores en combinación con las escalas C y D, evitando en algunos casos el deslizamiento de la reglilla.

Escala CIF. Es la escala CI desplazada en 3.1416 y da los valores recíprocos en relación con la escala CF.

Escala K (cúbica). Con las escalas D o C se obtienen los cubos y las raíces cúbicas de los números. Combinando con la escala A da los siguientes valores: $\sqrt[3]{n^2}$ y $\sqrt{n^3}$. Comprende valores de 1 a 10, de 10 a 100 y de 100 a 1000, dividida en tres secciones principales que pueden denominarse K_1 (a la sección izquierda), K_2 (a la sección intermedia) y K_3 (la sección derecha). En la mayoría de las reglas de cálculo esta escala se encuentra en el cuerpo principal "la regla", pero en otras, como en la "Post-Trig", está impresa en la reglilla.

Escala L (Logarítmica). Es usada para obtener las mantisas de los logaritmos de base 10 de los números representados por las escalas C o D, así como las man-

tisas de los logaritmos de las funciones trigonométricas, Las subdivisiones de la escala L son uniformes.

Escalas trigonométricas S. T. ST y ST'. Las escalas S, T y ST, en las reglas de bolsillo se encuentran generalmente al reverso de la "reglilla", y en reglas de tamaño mayor en la "regla". La ST' para valores de 3'30" a 34' se usa para problemas de Astronomía, aviación, etcétera, y en algunos casos en problemas de RADAR.

Escalas LL_1, LL_2, LL_3 y LL_4. Con estas escalas se obtienen los logaritmos neperianos (de base e = 2.718) directamente con la escala C o D. Calculan también los valores de potencias y raíces de cualquier exponente e índice. La regla de cálculo polifásica Keuffel & Esser de 25 cm. de longitud, así como la Post-Trig, de igual tamaño, tienen las escalas LL_1 (1.01 a 1.105), LL_2 (1.105 a 2.718) y LL_3 (2.718 a 22.026). La regla de cálculo de 24 escalas "Velásquez" tiene las cuatro escalas Log Log, con los siguientes valores LL_1 (1.001 a 1.01), LL_2 (1.01 a 1.105), LL_3 (1.105 a 2.718) y LL_4 (2.718 a 22 026), y su longitud es de 15 cm. Con estas escalas también pueden obtenerse los logaritmos de base 10 de números comprendidos entre 1 y 2 con mayor aproximación que la que puede dar la escala logarítmica L.

Escalas LLo y LLoo. La escala LLoo comprende valores desde 0.00005 hasta 0.90, y la LL_0 desde 0.905 hasta 0.999. Se utilizan para obtener las potencias y las raíces de las fracciones decimales, relacionándose con la escala B. También se obtienen las potencias de e (2.718) cuando los exponentes son negativos. Con las escalas LLo y B pueden obtenerse con cuatro y cinco decimales los logaritmos de números comprendidos entre 9 y 9976.

Escalas "eléctricas" V y W. Se encuentran en el fondo de la "regla" de la regla de cálculo "Elektro Nestler" Fáber y se relacionan con las escalas A y B. La regla de cálculo "Velásquez" tiene al reverso de la "reglilla" estas escalas y están combinadas con las escalas C y D, con lo cual se obtienen valores más aproximados.

Escala FKc. Resuelve la fórmula de la resonancia. Si se dan dos de los tres valores: Capacidad (micro micro fardios), inductancia L (micro henrios) y frecuencia (ki-

lociclos) se obtiene el tercero, con ayuda de las escalas A y B.

Escalas °C y °F. Expresan los valores de una y otra temperatura (sus divisiones no son de base logarítmica).

Escala pitagórica P. Se encuentra en la Regla Darmstadt y está hecha en relación con la escala E (escala D). Se basa en la fórmula trigonométrica

$$\text{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$$

de la que se obtiene:

$$\cos A = \sqrt{1 - \text{sen}^2 A}$$

En la regla Darmstadt se sustituye $\text{sen}^2 A$ por X^2 y se tiene:

$$\cos A = \sqrt{1 - X^2}$$

La escala pitagórica sirve para obtener los valores del coseno, buscándose el ángulo en S, y en P se encuentra el valor.

Descritas ya de una manera concreta, las escalas de las principales reglas de cálculo, y habiéndose explicado el uso para el cual fueron creadas fundamentalmente, conviene ahora entrar de lleno en la materia, comenzando por explicar con la necesaria extensión la técnica en que se basa cada una de las escalas. Para las personas que carezcan de algunas nociones de álgebra no es indispensable para el manejo práctico de la regla de cálculo, detenerse en este capítulo, sino que pueden comenzar el estudio desde la **lectura de valores en las escalas.**

II. TECNICA

Para la formación de las escalas de una regla de cálculo se tienen en cuenta su longitud y las propiedades de los logaritmos.

Graduación de la escala D. Si la longitud de la escala es de m cm. y el número es n, para señalar su valor se multiplica m por el logaritmo de n, es decir:

$$m \log n = \text{longitud logarítmica de n (en cm.)}$$

Si la longitud de la escala es de 15 cm. y el número es 5, se tiene:

$$15 \text{ log. } 5 = 15 \times 0.699 \text{ (cm.)} = 10.485 \text{ cm.}$$

Desde el punto de origen izquierdo al número 5 debe haber entonces una distancia de 10.485 cm. Fig. 2.

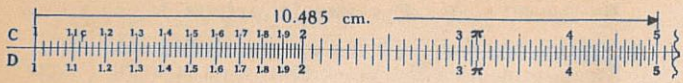


Fig. 2

De la misma manera pueden obtenerse los segmentos correspondientes a los demás valores 1, 2, 3, etc. (y los intermedios), teniendo en cuenta que n es mayor que 1 y menor que 10 ($1 < n < 10$). Por ejemplo:

$15 \times \log 1 = 15 \times 0 = 0$ cm.
$15 \times \log 2 = 15 \times 0.301 = 4.525$ cm.
$15 \times \log 3 = 15 \times 0.477 = 7.155$ cm
$15 \times \log 3.35 = 15 \times 0.525 = 7.875$ cm.
$15 \times \log 743 = 15 \times 0.871 = 13.065$ cm., etc.

La escala CI se forma tomando los valores de derecha a izquierda, para obtener así los recíprocos de los números de las escalas C o D.

En las escalas A y B se procede de la misma manera que en el caso de la escala D, pero teniendo en cuenta que $1 < n < 100$, y que el módulo ya no es el factor 15, sino 7.5.

La escala K (1/3 de la escala D) se construye del mismo modo utilizando como módulo el factor 5 con valores $1 < n < 1000$.

Escalas trigonométricas. Se sigue el mismo procedimiento, multiplicando 15 por el logaritmo de la función. Por ejemplo, para obtener la distancia al punto de origen del sen 15º, se tiene:

$15 \log \text{sen } 15^\circ = 15 \times 0.413 = 6.195$ cm. Fig. 3.

(Sólo debe tenerse en cuenta la mantisa).

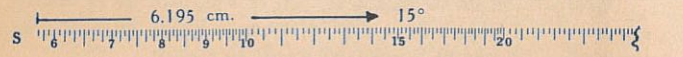


Fig. 3

Escalas Log Log. Para encontrar la longitud de 1.003, por ejemplo, se busca primero su logaritmo natural, es

decir, su logaritmo de base 2.718...; después se halla el logaritmo común (de base 10) del valor encontrado y, multiplicando por 15, se obtiene el segmento respectivo.

$$\log_e 1.003 = 0.00299$$

$$15 \log 0.00299 = 15 \times 0.4757 = 7.1355 \text{ cm. Fig. 4}$$

(Sólo se toma en cuenta la mantisa del log 0.00299).

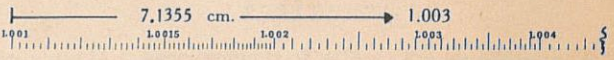


Fig. 4

Ana José Robles Uribe

LECTURA DE LOS VALORES EN LAS ESCALAS

Lo más importante antes de comenzar a efectuar operaciones es saber leer en las escalas de la regla con la necesaria rapidez y seguridad; para ello conviene hacer muchos ejercicios de lectura con ayuda del cursor, practicando principalmente con las subdivisiones no anotadas en las escalas.

Lectura en la escala D. Las distancias entre uno y otro valor no son uniformes; por ejemplo, si consideramos la escala D, se notará fácilmente que el segmento comprendido entre 1 y 2 es mucho mayor que la distancia entre 9 y 10. Por otra parte, el valor de cada subdivisión secundaria estará dado por el número de espacios comprendidos entre dos valores principales. Si hay dos espacios, cada uno de ellos tiene el valor de 1/2, o sea 0.5; si hay 5, el valor es de $1/5 = 0.2$; si son 10, cada espacio equivale a $1/10 = 0.1$, etc. Todavía más: si el cursor marca un valor que no esté graduado en la escala, se leerá conforme a la proporción que represente el espacio tomado.

Cualquier valor de la escala es relativo y puede representar múltiplos o submúltiplos del valor considerado. Por ejemplo, 1.14 es también 11.4, 114, 0.114, etc.; 2.05 representa 20.5, 205, 0.205, etc.; 3.83 es 38.3, 383, etcétera; 7.35 es 0.735 ó 735. (Fig. 5).

(Para que el dibujo sea mayor y más legible la escala D está dividida en dos partes).

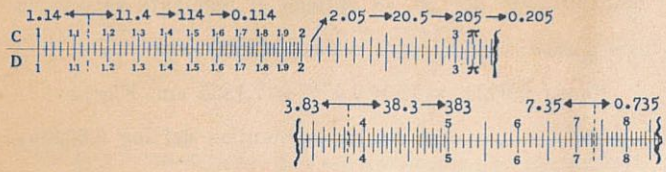


Fig. 5

Lectura en las escalas trigonométricas. Algunas reglas de cálculo tienen la subdivisión centesimal y en este caso se leen los valores como en la escala D. Pero hay otras reglas, que son las más comunes, en que la subdivisión es sexagesimal, en las cuales, si hay dos espacios, cada uno de ellos tendrá el valor de 30′ ó 30″, según la secala; si son tres espacios, los valores serán 20′ y 40′ ó 20″ y 40″, etcétera. Fig. 6.

(Cada división representa un solo valor).

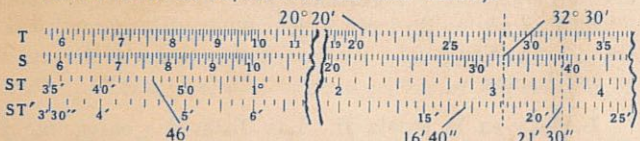


Fig. 6

Lectura en las escalas LL_1, LL_2, LL_3 y LL_4. Para su lectura no es necesaria explicación alguna, pues es suficiente ver la Fig. 7 para comprender que hay un solo valor para cada graduación. Incluyo las 4 escalas Log Log, pero se debe tener en cuenta que en las reglas de cálculo que tienen 2 ó 3 de estas escalas debe cambiarse el índice, si tiene 3 escalas la LL_4 equivale a la LL_3, la LL_3 a la LL_2, y la LL_2 corresponde a la LL_1.

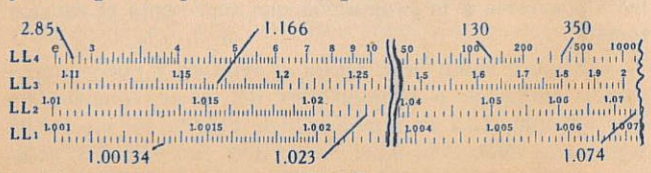


Fig. 7

Escalas LL_0 y LL_{00}. Se leen de derecha a izquierda Fig. 8.

Fig. 8

III. OPERACIONES

1) Multiplicación.

Escalas C y D. Teniendo en cuenta el principio de los logaritmos (el logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores), para multiplicar con la regla de cálculo basta sumar las longitudes representativas de los factores.

Ejemplo 56. 1.4×2.

a) Deslizando la reglilla hacia la derecha, se coloca el índice izquierdo de la escala C sobre 1.4 de la escala D.

b) Se recorre el cursor hasta 2 de la escala C, y el resultado se lee en $D = 2.8$. (Fig. 9).

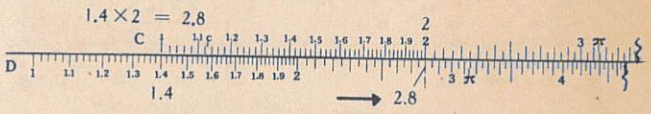


Fig. 9

Para multiplicar y dividir pueden utilizarse también las escalas A y B, pero conviene desde luego usar preferentemente las escalas C y D, puesto que la longitud de éstas es dos veces mayor, y por consiguiente hay más amplitud entre sus trazos y la lectura de las cantidades es más fácil. (Fig. 10).

Fig. 10

Ejemplo 57. 18×19.

Para obtener un resultado preciso, conviene multiplicar primero mentalmente las dos últimas cifras: $8 \times 9 = 72$, con lo cual se sabe de antemano que el producto termina en 2.

a) Colóquese C 1 sobre D 18.

b) Póngase la línea del cursor sobre C 19, y el producto se lee debajo, en D = 342. (Fig. 11).

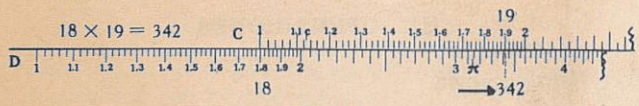


Fig. 11

Ejemplo 58. 8×16.

Puede suceder, como en este caso, que el factor leído en la escala C quede fuera de la regla; entonces se utiliza el extremo derecho de la escala C (C 10), desplazándose la reglilla hacia la izquierda.

a) Colóquese C 10 sobre D 8.

b) Se coloca el cursor en C 16, y el resultado se lee debajo, en D = 128. Fig. 12).

Fig. 12

Ejemplo 59. 22×19.

a) Colóquese C 1 sobre D 22.

b) Se pone el cursor en C 19, y el resultado se lee abajo, en D = 418. (Fig. 13).

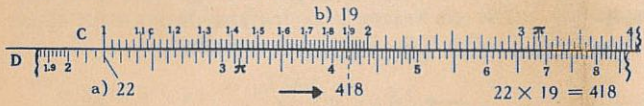


Fig. 13

Ejemplo 60. 42×37.

a) Se recorre la reglilla hacia la izquierda, colocando C 10 sobre D 42.

b) Se pone el cursor en C 37, y el resultado se lee en D = 1554. (Fig. 14).

Fig. 14

Ejemplo 61. 92×97.

Cuando los factores son números que se encuentran muy a la derecha de la regla, por ejemplo entre 80 y 100, el ojo humano no puede percibir en la escala el valor exacto, como en este caso, en el que sólo se alcanza a leer la graduación 89 más una pequeñísima fracción.

Para obtener el resultado preciso se toman los **complementos aritméticos a 100**, es decir, $100 - 92 = 8$ y $100 - 97 = 3$; y el producto de estos complementos: $8 \times 3 = 24$, será la terminación del resultado en sus dos últimas cifras.

a) Colóquese C 10 sobre D 92.

b) Puesto el cursor en C 97, el resultado se lee en D 89 más una pequeña fracción de la escala, cuyo valor 24 (producto de los complementos) es la terminación del resultado.

Respuesta: $92 \times 97 = 8924$. (Fig. 15).

Ejemplo 62. 96×92.

a) Colóquese C 10 sobre D 92.

b) Se pone el trazo del cursor en C 96, y el resultado se lee en D 88 más una pequeña fracción que equivale a $4 \times 8 = 32$.

Respuesta: $96 \times 92 = 8832$. (Fig. 16).

Fig. 15

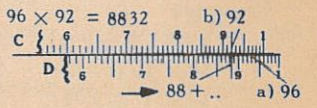


Fig. 16

Ejemplo 63. 89×94.

a) Colóquese C 10 sobre D 89.

b) Póngase la línea del cursor en C 94, y el resultado se lee en D 83 más una fracción que equivale a $11 \times 6 = 66$, que es la terminación del producto.

Respuesta: $89 \times 94 = 8366$. (Fig. 17).

Ejemplo 64. 88×88.

Si el producto de los complementos consta de 3 cifras, para la terminación del resultado sólo deben tomarse las dos últimas (esta regla es para todos los casos).

a) Se coloca el extremo derecho de la escala C (C 10) sobre D 88.

b) Se pone el cursor en C 88, y abajo, en la escala D, se lee 77 más una fracción. Se toman las dos últimas cifras para la terminación del producto $12 \times 12 = 144$. El valor 44 es el que debe considerarse.

Respuesta: $88 \times 88 = 7744$. (Fig. 18).

Fig. 17

Fig. 18

SITUACION DEL PUNTO DECIMAL EN LA MULTIPLICACION

Otra ventaja de gran importancia al usar las escalas C y D, es la de poder saber la colocación del punto decimal.

Cuando se multiplican dos números que contengan cifras enteras y la reglilla se proyecta a la derecha, el producto tendrá tantas cifras enteras como la suma de las cifras enteras de los dos factores, menos 1.

Ejemplo:

$1.4 \times 2 = 2.8$; $\quad 1 + 1 - 1 = 1$ cifra.
$18 \times 19 = 342$; $\quad 2 + 2 - 1 = 3$ cifras.
$12 \times 17 = 204$; $\quad 2 + 2 - 1 = 3$ cifras.

En el caso de las fracciones decimales se aplica la misma regla, pero teniendo en cuenta que el número de cifras es negativo, es decir, que para 0.45 el número de guarismos es cero; para 0.08 es -1; para 0.0056 es -2 (según el número de ceros entre el punto decimal y la primera cifra significativa).

Ejemplos:

$3.2 \times 0.025 = 0.08$; $1 + (-1) - 1 = -1$ (un cero)
$0.0014 \times 0.02 = 0.000028$; $(-2) + (-1) - 1 = -4$ (4 ceros)
$3200 \times 0.13 = 416$; $4 + 0 - 1 = 3$ cifras.

(Algunas reglas de cálculo tienen a la derecha de la escala D la expresión **Prod. −1** que indica la substracción de 1 cuando al multiplicarse se desliza la reglilla hacia la derecha. Tienen también Cte + 1 a la izquierda cuyo significado se dará al tratarse de la división).

Si al multiplicar la reglilla se desliza hacia la izquierda, se sumarán también las cifras de los factores sin restar 1 a la suma.

Ejemplos:

$70 \times 45 = 3150$; $2 + 2 = 4$ cifras.
$65 \times 0.35 = 22.76$; $2 + 0 = 2$ cifras.
$92 \times 97 = 8924$; $2 + 2 = 4$ cifras.
$8.9 \times 940 = 8366$; $1 + 3 = 4$ cifras.
$8.9 \times 0.000094 = 0.0008366$; $1 + (-4) = -3$ (tres ceros)
$0.92 \times 0.0097 = 0.008924$; $0 + (-2) = -2$ (dos ceros)

Multiplicaciones sucesivas de tres o más factores. (Escalas C y D).

En estos casos no es necesario leer los productos parciales, pues basta colocar el cursor en cada uno de los resultados, colocando un extremo de la reglilla (C 1 ó C 10), según el caso, debajo de la línea del cursor, efectuando después la multiplicación con el siguiente factor, hasta obtener el resultado final.

Ejemplo 65. $1.6 \times 45 \times 0.00015$.

a) Deslizando la reglilla hacia la derecha se coloca C 1 sobre 1.6.

b) Se deja el trazo del cursor en 45 de la escala C (no es necesario leer este producto). (Fig. 19).

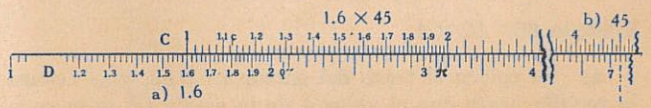


Fig. 19

e) Se desliza la reglilla hacia la izquierda hasta que su extremo derecho C 10 coincida con la línea del cursor.

d) Se coloca el cursor sobre C 15 y el resultado final se lee en D = 0.0108. (Fig. 20).

Fig. 20

Por lo que se refiere a la situación del punto decimal, a la suma de las cifras debe restarse 1, puesto que la reglilla se proyectó a la derecha una vez. (Cada vez que la reglilla se desplace hacia la derecha debe restarse 1, si se desliza 2 veces se resta 2, si 3 se restará 3, etc.).

Respuesta: $1.6 \times 45 \times 0.00015 = 0.0108$

$1 + 2 + (-3) - 1. = -1$ (un cero).

EJERCICIOS

114. $14 \times 24 = 336$
115. $12 \times 17 = 204$
116. $22 \times 2.4 = 52.8$
117. $1.9 \times 0.023 = 0.0437$
118. $0.0032 \times 24\ 000 = 76.8$
119. $16800 \times 0.00017 = 2.856$
120. $8.9 \times 0.000094 = 0.0008366$
121. $88 \times 86 = 7568$
122. $2.5 \times 0.0036 \times 0.14 = 0.000126$
123. $0.0325 \times 28 \times 300 = 273$

Multiplicación con la escala recíproca CI.

Ejemplo 66. 52×4.

a) Se coloca el trazo del cursor en D 52, y se desliza la reglilla hasta que el valor 4 de la escala CI se encuentre debajo de la línea del cursor.

b) El extremo izquierdo de la escala C señala el resultado en D = 208. (Fig. 21).

Fig. 21

Ejemplo 67. 36×14.

a) Coincidir, con ayuda del cursor, D 36 con CI 14.

b) Léase el producto en D = 504. (Fig. 22).

Fig. 22

EJERCICIOS

Sígase este método para resolver los ejercicios del 114 al 121.

Producto de tres factores con la escala recíproca CI.

Ejemplo 68. $4 \times 36 \times 15$.

a) Coincidir D 4 con CI 36.

b) Colóquese el cursor en C 15, y el resultado se lee en D = 2160. (Fig. 23).

Fig. 23

Algunas veces el tercer factor queda fuera de la regla, como por ejemplo en $5 \times 3 \times 8$, en tal caso conviene seguir el procedimiento indicado en el ejemplo 65.

EJERCICIOS

124. $4.4 \times 0.27 \times 1.5 = 1.782$

125. $52 \times 2.4 \times 29 = 3620$

126. $1.8 \times 3.1 \times 5 = 27.9$

127. $16 \times 23 \times 75 = 27\,600$
128. $1.2 \times 4.5 \times 2.5 = 13.5$
129. $5 \times 3 \times 16 = 240$
130. $3.5 \times 2.6 \times 2.5 = 22.75$
131. $6.2 \times 25 \times 1.8 = 279$
132. $4.85 \times 4 \times 1.2 = 23.2$
133. $6 \times 18 \times 15 = 1620$

2) División. Como el logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor, para dividir con regla de cálculo se resta a la longitud representativa del dividendo la longitud del divisor.

Lo más práctico es considerar la escala D como dividendo y la escala C como divisor.

Ejemplo 68. Dividir 805 entre 35.

a) Coincidir, con ayuda del cursor, D 805 con C 35.

b) El extremo izquierdo de la escala C señala el cociente en D = 23. (Fig. 24).

Fig. 24

Ejemplo 70. Dividir 648 entre 24.

a) Coincidir D 648 con C 24.

b) El cociente es señalado por el extremo izquierdo de C en la escala D = 27. (Fig. 25).

Fig. 25

Ejemplo 71. Dividir 132 entre 19.

a) Deslizando la reglilla hacia la izquierda coincídase

D 132 con C 19 y el cociente lo señala el extremo derecho de la escala C, en D = 6.95. (Fig. 26).

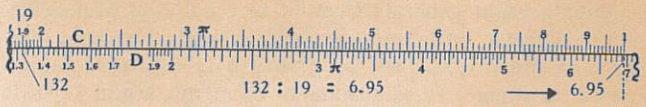


Fig. 26

Colocación del punto decimal. Como se dijo anteriormente algunas reglas de cálculo tienen impresa a la izquierda la expresión **Cte. + 1** o Quot. + 1, para indicar que cuando el cociente se lee a la izquierda se debe agregar 1 a la diferencia de las cifras.

En los ejemplos 69 y 70 los cocientes se leen a la izquierda y, por consiguiente, a la substracción del número de cifras se agrega 1.

805 : 35 = 23
3 − 2 + 1 = 2 (dos cifras enteras).
648 : 24 = 27
3 − 2 + 1 = 2 (dos cifras enteras).

En el ejemplo número 70 el resultado se lee a la derecha, por lo que únicamente se hace la substracción del número de cifras.

132 : 19 = 6.95
3 − 2 = 1 (una cifra entera).

EJEMPLOS

80 500 : 350 = 230
5 − 3 + 1 = 3 (tres cifras enteras).
805 : 0.035 = 23 000
3 − (−1) + 1 = 3 + 1 + 1 = 5 cifras.
0.00805 : 35 = 0.00023
− 2 − 2 + 1 = − 3 (tres ceros).
132 : 0.0019 = 69 500
3 − (−2) = 3 + 2 = 5 cifras enteras.
0.00132 : 19 = 0.0000695
− 2 − 2 = −4 (cuatro ceros).

Para las reglas de cálculo que no tienen la indicación (Prod. -1 y Cte. $+1$) es más conveniente considerar la siguiente regla general: Cuando la regilla se desliza hacia la derecha, en la multiplicación se resta 1 y en la división se suma 1. Cuando se desliza a la izquierda, únicamente se suma o resta el número de cifras, según se trate de multiplicar o dividir. (La regla de cálculo "Velásquez" lleva impresa esta indicación).

División con las escalas A y B. En este caso existe la desventaja señalada al tratarse de la multiplicación, pero a veces, en la aplicación de algunas fórmulas, es conveniente usar estas escalas.

Ejemplo 72. 87 : 34.

a) Se coloca B 34 debajo de A 87.

b) El extremo izquierdo de la escala B señala el cociente en A = 2.56. (Fig. 27).

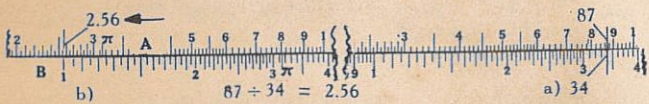


Fig. 27

EJERCICIOS

134.	$\frac{2400}{16} = 150$	$\frac{0.0038}{0.025} = 0.152$
135.	$\frac{356}{19} = 18.7$	$\frac{0.0056}{0.00075} = 7.46$
136.	$\frac{1330}{38} = 35$	$\frac{4.58}{0.064} = 71.6$
137.	$\frac{840}{0.024} = 35\ 000$	$\frac{0.386}{0.0015} = 257$
138.	$\frac{1250}{0.0016} = 781\ 250$	$\frac{0.0018}{0.000012} = 150$

Operaciones combinadas. Multiplicaciones y divisiones con escalas C y D.

Ejemplo 74.

$$\frac{52 \times 26}{53}$$

a) Se divide 52 entre 53, coincidiendo D 52 con C 53.

b) Se coloca el cursor en C 26 y el resultado final se lee en D = 25.5. (Fig. 28).

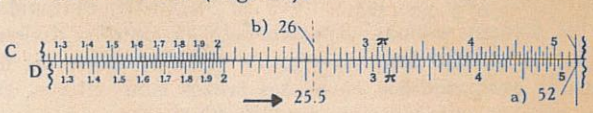


Fig. 28

Ejemplo 75.

$$\frac{25 \times 46}{31}$$

a) Se divide 25 entre 31, haciendo coincidir los valores D 25 y C 31.

b) Se coloca el trazo del cursor sobre C 46 y el resultado se lee en D = 37.1. (Fig. 29).

Fig. 29

EJERCICIOS

139. $\dfrac{44.5 \times 37}{62} = 26.6$

140. $\dfrac{64 \times 192}{38} = 324$

141. $\dfrac{2.14 \times 1.74}{2.3} = 1.62$

142. $$\frac{54 \times 5}{2} = 135$$

143. $$\frac{48 \times 51}{130} = 18.8$$

(En los ejercicios 142 y 143 es necesario deslizar dos veces la reglilla).

Es conveniente practicar mucho la regla de cálculo y familiarizarse con los valores de los trazos contenidos en las diversas escalas, especialmente en aquellas divisiones que no están designadas, para apreciar mejor los intervalos comprendidos entre dos trazos consecutivos. De esta manera se adquirirá, sin dificultad alguna, la precisión necesaria.

PROPORCIONES

La mayoría de los problemas y en la aplicación de fórmulas y leyes en general, se resuelven por medio de proporciones. Como por ejemplo en Regla de Tres (inversa y directa), problemas de tanto por ciento, intereses y descuentos, Regla de Compañía, conversión de monedas, transformación de unidades del sistema métrico decimal, etc. En Geometría, en Física, Química, Termodinámica, Trigonometría; en Topografía, Construcciones, Hidráulica; en Mecánica, Electricidad, Radio, etc.

Las operaciones pueden ejecutarse con mucha rapidez y facilidad utilizando la regla de cálculo. Por ahora sólo se estudiarán los ejercicios principales y más adelante se harán aplicaciones en problemas y fórmulas más usuales.

Una proporción es la igualdad de dos razones. Por ejemplo:

$$\frac{12}{132} = \frac{14}{154}$$

Si se conocen tres elementos y se desea conocer el otro se puede obtener éste fácilmente por medio de las escalas **C** y **D**.

Ejemplo 76.

$$\frac{12}{132} = \frac{14}{x}$$

a) Se hacen coincidir D 132 con C 12.

b) Se coloca el cursor en C 14 y el resultado se lee en D = 154. (Fig. 30).

Fig. 30

Para mayor facilidad y con el objeto de que la situación de las escalas sea la misma que en la proporción, se han colocado los numeradores en la escala C y los denominadores abajo, en la escala D.

Siempre deben coincidir primero los valores de la razón cuyos dos elementos se conocen.

Ejemplo 77.

$$\frac{16}{128} = \frac{x}{176}$$

a) Coincidir D 128 con C 16.

b) Se coloca el cursor en D 176 y el resultado se lee en C = 22. (Fig. 31).

Fig. 31

Algunas veces es necesario mover la reglilla dos veces.

Ejemplo 78.

$$\frac{12}{188} = \frac{9}{x}$$

a) Coincidir D 188 con C 12.

b) Como el valor 9 queda fuera de la regla, se coloca el cursor en C 1 (extremo izquierdo) y se desliza la re-

glilla hacia la izquierda hasta que C 10 esté debajo del trazo del cursor.

c) Se coloca el cursor en C 9 y el resultado se lee en D = 141. (Figs. 32 y 33).

Fig. 32

Fig. 33

EJERCICIOS

144. $\frac{2}{26} = \frac{3}{x}$; $x = 39$

145. $\frac{56}{5} = \frac{1400}{x}$; $x = 125$

146. $\frac{x}{90} = \frac{18}{36}$; $x = 45$

147. $\frac{124}{x} = \frac{186}{213}$; $x = 142$

148 $\frac{14.8}{21.5} = \frac{22.2}{x}$; $x = 32.25$

149. $\frac{18}{15.2} = \frac{x}{30} = \frac{y}{13}$;

Respuestas: $x = 35.5$; $y = 15.4$.

150. $\frac{24}{25} = \frac{120}{x} = \frac{192}{y}$;

Respuestas: $x = 125$; $y = 200$.

CUADRADO Y RAIZ CUADRADA

a^2; $\sqrt{a}$

Uso de las escalas A y D o B y C. Teniendo en cuenta el principio de los logaritmos: Para elevar al cuadrado una cantidad se multiplica por el 2 el logaritmo de la cantidad; y para obtener la raíz cuadrada se divide entre 2 el logaritmo de la cantidad, y como la escala A equivale a un medio de la escala D, cada subdivisión de la escala A representa una longitud logarítmica dos veces mayor que la correspondiente en la escala D. En consecuencia, cada número de A es el cuadrado del número que corresponde directamente abajo de la escala D.

La escala A se subdivide en dos partes: A_1 (mitad izquierda y A_2 (mitad derecha). En A_1 se leen cantidades que contienen número impar de cifras enteras; en A_2, cantidades que contienen número par de cifras enteras. (Fig. 34).

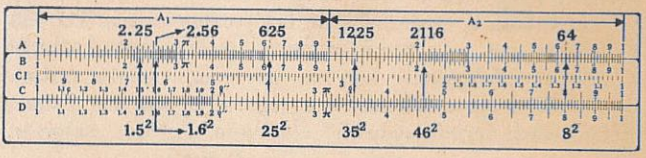


Fig. 34

Ejemplo 79. $1.5^2 = 2.25$
Ejemplo 80. $1.6^2 = 2.56$
Ejemplo 81. $25^2 = 625$
Ejemplo 82. $35^2 = 1225$
Ejemplo 83. $46^2 = 2116$
Ejemplo 84. $8^2 = 64$

Para determinar el punto decimal en los cuadrados de los números debe seguirse la siguiente **regla general:** Se multiplica por 2 el número de cifras, restándole 1 al producto solamente cuando el cuadrado se lee en A_1 (mitad izquierda de la escala A).

EJEMPLOS

$150^2 = 22\ 500$ (en A_1); $(2 \times 3) - 1 = 5$ cifras
$19^2 = 161$ (en A_1): $(2 \times 2) - 1 = 3$ cifras.
$48^2 = 2304$ (en A_2); $2 \times 2 = 4$ cifras.
$51^2 = 2601$ (en A_2); $2 \times 2 = 4$ cifras.
$1.6^2 = 2.56$ (en A_1); $(2 \times 1) - 1 = 1$ cifra.
$0.0000\ 18^2 = 0.000\ 000\ 032\ 4$ (en A_1);
$2 \times (-3) - 1 = -7 = 7$ ceros.
$0.000\ 07^2 = 0.000\ 000\ 004\ 9$ (en A_2);
$2 \times (-4) = -8 = 8$ ceros.
$0.000\ 02^2 = 0.000\ 000\ 000\ 4$ (en A_1);
$2 \times (-4) - 1 = -9 = 9$ ceros
$96^2 = 9216$ (en A_2); $2; \times 2 = 4$ cifras.
$96\ 000^2 = 9\ 216\ 000\ 000$ (en A_2);
$2 \times 5 = 10$ cifras enteras.
$0.000\ 92^2 = 0.000\ 000\ 846\ 4$ (en A_2);
$2 \times (-3) = -6 = 6$ ceros.

Regla especial para obtener mayor aproximación en los cuadrados de los números. Como es muy difícil obtener exactitud en los cuadrados de números cuyos valores se encuentran a la derecha de las escalas en que las subdivisiones son muy pequeñas, como por ejemplo entre 80 y 100, es conveniente servirse del complemento aritmético a 100, cuyo cuadrado se agregará, en sus dos últimas cifras, como terminación del resultado. Pueden usarse indistintamente las escalas A y D o B y C.

Ejemplo 85. 92^2.

a) Se coloca el cursor en D **92**.

b) Se lee en A_2 el valor **84**, más una pequeña fracción que no puede apreciar el ojo humano.

c) Se considera el cuadrado del complemento de 92 $(100 - 92) = 8$;

$$8^2 = 64$$

Solución: Se agrega a **84** la terminación 64 y se tiene:

$$92^2 = 8464.$$ (Fig. 35).

Ejemplo 86. 94^2.

a) Se coloca el cursor en D **94**.

b) Se lee en la escala A el valor **88**.

c) Como el complemento de 94 es 6, se agrega la terminación $6^2 = 36$, y el resultado es 8836. (Fig. 36).

Fig. 35

Fig. 36

Ejemplo 87. 91^2

a) Se coloca la línea del cursor sobre D 91.

b) En la escala A se lee 82 **más una fracción.**

c) Esta pequeña fracción equivale $9^2 = 81$; y el resultado es: 8281. (Fig. 37).

Ejemplo 88. 88^2.

a) Se coloca el cursor en D 88.

b) Se lee en A el valor 77 más una pequeña fracción.

c) A 88 le faltan 12 para ser 100. La pequeña fracción equivale a las dos últimas cifras de $12^2 = 144$. El resultado es: 7744. (Fig. 38).

Fig. 37

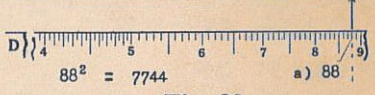


Fig. 38

Si el número se encuentra cerca de 50, también pueden obtenerse valores exactos, agregando las dos últimas cifras del cuadrado del complemento a 50 o del cuadrado del valor sobrante a esta cantidad según el caso.

Ejemplo 89. 46^2.

a) Se coloca el cursor en D 46.

b) Se lee en A el valor 21 más una pequeña fracción.

c) A 46 le faltan 4 para ser 50. La fracción equivale a $4^2 = 16$. Solución: $46^2 = 2116$.

Ejemplo 90. 41^2.

Se coloca el cursor en D 41.

b) Se lee en **A 16** más una fracción.

c) Esta fracción equivale a $9^2 = 81$.

Solución: $41^2 = 1681$.

Ejemplo 91. 48^2.

a) Se coloca el cursor en D 48.

b) Se lee en A el valor 23 más una pequeña fracción.

c) Como $50 - 48 = 2$, la fracción equivale a $2^2 = 4$. y como la terminación debe ser dos cifras, su valor es de 04.

Solución: $48^2 = 2304$.

Ejemplo 92. 53^2.

a) Se coloca el cursor en D 53.

b) Se lee en A el valor 28 más una pequeña fracción.

c) Como a 53 le sobra 3 con relación a 50, se tiene que la fracción equivale a $3^2 = 9$.

Solución: $53^2 = 2309$.

Ejemplo 93. 56^2

a) Se coloca el cursor en D 56.

b) Se lee en A el valor 31 más una fracción.

c) Esta fracción equivale a $6^2 = 36$.

Solución: $56^2 = 3136$.

Ejemplo 94. 59^2

a) Se coloca el cursor en D 59.

b) Se lee en A el valor 34 más una fracción.

c) Esta fracción equivale a $9^2 = 81$.

Solución: $59^2 = 3481$.

EJERCICIOS

151.	$17^2 = 289$	156.	$34^2 = 1156$
152.	$24^2 = 576$	157.	$35^2 = 1225$
153.	$26^2 = 676$	158.	$39^2 = 1521$
154.	$29^2 = 841$	159.	$42^2 = 1764$
155.	$31^2 = 961$	160.	$85^2 = 7225$

161. $0.000\ 16^2 = 0.000\ 000\ 0256$

162. $0.021^2 = 0.000\ 441$
163. $430^2 = 184\ 900$
164. $260^2 = 67\ 600$
165. $0.000\ 89^2 = 0.000\ 000\ 7921$

Para ejecutar estas operaciones pueden utilizarse también las escalas C y D, considerando el cuadrado como un producto de dos factores iguales: $a^2 = a \times a$.

Ejemplo: $18^2 = 18 \times 18 = 324$. Resultado que se obtiene siguiendo las instrucciones dadas en la multiplicación.

RAIZ CUADRADA. Cada número de la escala D es la raíz cuadrada del correspondiente en la escala A. En estos casos debe tenerse en cuenta que para obtener raíces cuadradas de números comprendidos entre 1 y 10 se opera en A_1 (mitad izquierda de la escala A), y para extraer raíces de números comprendidos entre 10 y 100 se opera en la mitad derecha, en A_2. Véase la figura número 34.

Pueden utilizarse también las escalas B y C que se encuentran en la reglilla. **Ejemplos** (Fig. 39).

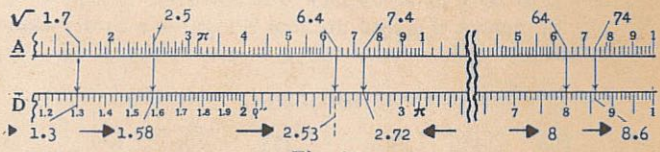


Fig. 39

Ejemplo 95. $\sqrt{1.7} = 1.3$; $\sqrt{17} = 4.12$
Ejemplo 96. $\sqrt{2.5} = 1.58$; $\sqrt{25} = 5$
Ejemplo 97. $\sqrt{6.4} = 2.53$; $\sqrt{64} = 8$
Ejemplo 98. $\sqrt{7.4} = 2.72$; $\sqrt{74} = 8.6$

Para obtener las raíces cuadradas de números no comprendidos entre 1 y 100, debe seguirse la regla general que se dió anteriormente y que no está por demás repetirla a continuación:

1º Se mueve el punto decimal a la derecha o a la izquierda 2, 4, 6, etc., lugares, hasta obtener un número comprendido entre 1 y 100.

2º Se extrae la raíz cuadrada a este número, colocando el punto decimal de la primera cifra significativa

3º Se mueve el punto decimal un lugar por cada par de cifras en sentido contrario al movimiento original.

Ejemplo 99. $\sqrt{17\ 000}$

a) Se mueve el punto decimal 4 lugares a la izquierda y se obtiene 1.7.

b) Utilizando A_1 (mitad izquierda de la escala A) y la escala D, se obtiene $\sqrt{1.7} = 1.3$.

c) Se mueve el punto decimal dos lugares a la derecha.

Solución: $\sqrt{17\ 000} = 130$.

Ejemplo 100. $\sqrt{0.000\ 032\ 5}$.

a) Se mueve el punto decimal 6 lugares a la derecha y se obtiene 32.5.

b) Para obtener $\sqrt{32.5} = 5.7$ se utilizan las escalas A_2 y D.

c) Se mueve el punto decimal 3 lugares a la izquierda.

Solución: $\sqrt{0.000\ 032\ 5} = 0.0057$.

Ejemplo 101. $\sqrt{198\ 000}$.

a) Se mueve el punto decimal 4 lugares a la izquierda, obteniendo 19.8.

b) Con A_2 y D se obtiene $\sqrt{19.8} = 4.45$.

c) Se mueve el punto decimal 2 lugares a la derecha.

Solución: $\sqrt{198\ 000} = 445$.

EJERCICIOS

166. $\sqrt{445} = 21.1$
167. $\sqrt{5.2} = 2.28$
168. $\sqrt{18.5} = 43$
169. $\sqrt{185} = 13.6$
170. $\sqrt{57} = 7.55$
171. $\sqrt{98} = 9.9$
172. $\sqrt{2600} = 51$
173. $\sqrt{1560} = 39.5$
174. $\sqrt{930} = 30.5$
175. $\sqrt{130} = 11.4$
176. $\sqrt{0.000\ 005\ 9} = 0.002\ 43$
177. $\sqrt{0.000\ 269} = 0.0164$
178. $\sqrt{0.0057} = 0.0755$
179. $\sqrt{1\ 960\ 000} = 1400$
180. $\sqrt{1640} = 40.5$

CUBO Y RAIZ CUBICA

a^3; $\sqrt[3]{a}$

REGLAS SIN ESCALA CUBICA K. En este caso debe considerarse el cubo de un número como el produc-

to de tres factores iguales: $a^3 = a \times a \times a$, y ejecutar las operaciones ya sea utilizando solamente las escalas C y D o bien multiplicando con la recíproca CI, como quedó ampliamente explicado en los ejemplos 65 y 68.

También podrán combinarse las 4 escalas A, B, C y D para obtener el cubo de un número, considerando la potencia como la expresión: $a^3 = a^2 \times a$. (Debe tenerse cuidado al colocar el punto decimal).

Ejemplo 102. $15^3 = 15^2 \times 15$.

a) Colóquese C 1 (extremo izquierdo de la reglilla sobre D 15.

b) Deslizando el cursor hasta B_2 15 se encuentra el resultado en $A_2 = 3375$. (Fig. 40).

Fig. 40

Ejemplo 103. $6^3 = 6^2 \times 6$.

a) Coincidir el extremo derecho de la reglilla con D 6.

b) Colocar el cursor en B_1 6, y el resultado se lee en A_1 216. (Fig. 41).

Fig. 41

REGLAS CON ESCALA CUBICA K. (En algunas reglas de cálculo, principalmente las europeas, se designa la escala cúbica con la letra **b**). La escala **K** se encuentra generalmente cerca de la escala A o cerca de la escala D; en algunas reglas, como en las de escritorio (de 25 cm.), se encuentra en la parte central de la reglilla. Las reglas

"Universal Nestler" y "Elektro 37 Nestler" llevan la escala cúbica en su parte lateral inferior.

La escala cúbica está formada por tres divisiones principales iguales. La primera de la izquierda puede designarse por K_1 (contiene valores de 1 a 10), la de en medio por K_2 (valores de 10 a 100) y la de la derecha por K_3 (con valores de 100 a 1000). Cada una de estas partes es ⅓ de la escala D o de la escala C, y por consiguiente se calcula de la misma manera como se hizo para obtener raíz cuadrada y elevar al cuadrado con las escalas A y D.

Sobre la escala K se obtiene el cubo de un número colocado en D ó en C.

Ejemplos: $2^3 = 8$; $3^3 = 27$; $5^3 = 125$. (Fig. 42).

Fig. 42

La colocación del punto decimal en números que no se encuentran comprendidos entre 1 y 1000 es fácil obtenerla con la siguiente regla:

a) Se multiplica por 3 el número de cifras enteras o el número de ceros entre el punto decimal y la primera cifra significativa, según se trate de un número entero o de una fracción decimal.

b) Si el resultado se lee en K_1 se restan 2 cifras al producto. Si está en K_2 se resta una cifra.

Ejemplo 104. 0.015^3

a) Colóquese el cursor en D 15, y en K_1 se lee **3.375.**
Como $3 \times (-1) - 2 = -5$ (cinco ceros).
La solución es: $0.015^3 = 0.000\ 003\ 375$.

Ejemplo 105. 15^3

Como 15^3 se encuentra utilizando la escala K_1, se tiene que: $(3 \times 2) - 2 = 4$ cifras enteras.
La solución es: $15^3 = 3375$.

Ejemplo 106. 40^3

a) En K_2 se lee **64.**

Como $(3 \times 2) - 1 = 5$ cifras.

La solución es: $40^3 = 64\ 000.$

Ejemplo 107. 0.04^3

Como $3 \times (-1) - 1 = -4$ (cuatro ceros).

La solución es: $0.04^3 = 0.000\ 064.$

Ejemplo 108. 70^3

a) Colocado el trazo del cursor en D 7, se lee en K_3 el valor **343.**

Como $3 \times 2 = 6$ cifras.

La solución es: $70^3 = 343\ 000.$

Ejemplo 109. 0.0007^3

Como $3 \times (-2) = -6$ (seis ceros).

La solución es: $0.007^3 = 0.000\ 000\ 343.$

EJERCICIOS

181. $0.002^3 = 0.000\ 000\ 008$
182. $1.08^3 = 1.26$
183. $0.0214^3 = 0.000\ 0098$
184. $2.25^3 = 11.4$
185. $0.63^3 = 0.25$
186. $0.06^3 = 0.000\ 216$
187. $31.6^3 = 31\ 500$
188. $164^3 = 4\ 410\ 000$
189. $90^3 = 729\ 000$
190. $104^3 = 1\ 125\ 000$

(Se obtiene mayor aproximación en las reglas con escalas Log. Log.).

RAIZ CUBICA. Para extraer raíz cúbica de números comprendidos entre 1 y 10 se usa la escala K_1, si el número se encuentra entre 10 y 100 se utiliza la escala K_2, y si está entre 100 y 1000 la escala K_3.

Ejemplos: $\sqrt[3]{3.5} = 1.52$; $\sqrt[3]{22} = 2.8$; $\sqrt[3]{190} = 5.75$. (Figura 43).

Fig. 43

Para obtener la raíz cúbica de números no comprendidos entre 1 y 1000 se sigue la siguiente regla:

1º Se mueve el punto decimal a la derecha o a la izquierda 3, 6, 9, etc., lugares, hasta obtener un número comprendido entre 1 y 1000.

2º Se extrae la raíz cúbica a este número, colocando el punto decimal después de la primera cifra significativa.

3º Se mueve el punto decimal un lugar por cada tres cifras en sentido contrario al movimiento original.

Ejemplo 110. $\sqrt[3]{1700}$.

a) Se mueve el punto decimal tres lugares a la izquierda y se obtiene **1.7.**

b) Se extrae la raíz cúbica a 1.7 colocando el cursor en K_1 (valor 1.7) y el resultado se lee en $D = 1.19$.

La solución es: $\sqrt[3]{1700} = 11.9$.

Ejemplo 111. $\sqrt[3]{22\ 000}$.

a) Se mueve el punto decimal tres lugares a la izquierda obteniendo **22.**

b) Utilizando la escala K_2 se obtiene: $\sqrt[3]{22} = 2.8$.

c) Se mueve el punto decimal un lugar a la derecha.

Solución: $\sqrt[3]{22\ 000} = 28$.

Ejemplo 112. $\sqrt[3]{0.000\ 19}$.

a) Se mueve el punto decimal 6 lugares a la derecha, obteniendo **190.**

b) Con la escala K_3 se obtiene: $\sqrt[3]{190} = 5.75$.

c) Se mueve el punto decimal 2 lugares a la izquierda.

Solución: $\sqrt[3]{0.000\ 190} = 0.0575$.

EJERCICIOS

191. $\sqrt[3]{0.000\ 315} = 0.068$
192. $\sqrt[3]{1.84} = 1.22$
193. $\sqrt[3]{3.6} = 1.53$
194. $\sqrt[3]{36} = 3.3$
195. $\sqrt[3]{360} = 7.1$
196. $\sqrt[3]{0.98} = 0.993$
197. $\sqrt[3]{0.75} = 0.91$
198. $\sqrt[3]{0.0145} = 0.243$
199. $\sqrt[3]{960\ 000} = 98.6$
200. $\sqrt[3]{840} = 9.4$

POTENCIAS FRACCIONARIAS: $a^{3/2}$ y $a^{2/3}$. Como cada una de las divisiones de la escala A representa los 3/2 de la escala K, y las divisiones de ésta es los 2/3 de la A, usando estas escalas se pueden obtener las potencias 3/2 ó 2/3.

El exponente 3/2 expresa la raíz cuadrada de un cubo, y el exponente 2/3 la raíz cúbica de un cuadrado.

Ejemplo 113. $6^{3/2} = \sqrt{6^3}$

a) Se coloca el cursor en A_1 6, y el resultado se lee en $K_2 = 14.7$. (Fig. 44 a).

Ejemplo 114. $60^{3/2} = \sqrt{60^3}$

Se coloca el cursor en A_2 60, y el resultado se lee en $K_3 = 465$. Fig. 44 (b).

Fig. 44

Para calcular $a^{2/3}$ se coloca el cursor en K y se obtiene el resultado en la escala A.

Ejemplo 115.

(a) $2^{2/3} = \sqrt[3]{2^2} = 1.58$
(b) $20^{2/3} = \sqrt[3]{20^2} = 7.37$
(c) $200^{2/3} = \sqrt[3]{200^2} = 34.2$. (Fig. 45).

Fig. 45

Debe tenerse cuidado en la colocación del punto decimal, considerando la parte que se use de las escalas A y K, según regla dada anteriormente.

EJERCICIOS

201.	$3^{3/2} = 5.2$	206.	$1.65^{2/3} = 1.4$
202.	$2.4^{3/2} = 3.7$	207.	$3.5^{2/3} = 2.3$
203.	$3.8^{3/2} = 7.4$	208.	$23^{2/3} = 8.1$
204.	$16^{3/2} = 64$	209.	$64^{2/3} = 16$
205.	$43^{3/2} = 280$	210.	$190^{2/3} = 33$

CUARTA POTENCIA DE UN NUMERO. a^4. Como para obtener potencias de mayor grado a la cúbica en la regla de cálculo daría menor aproximación, no se incluye escala especial para obtener la cuarta potencia, pues sería necesario formarla con subdivisiones mucho más pequeñas que la escala cúbica. Las escalas Log. Log. sí dan una mayor aproximación, como se verá más adelante.

De todas maneras, con las escalas fundamentales puede obtenerse la cuarta potencia.

Ejemplo 116. 2^4

a) Se coloca el extremo izquierdo de la reglilla en el valor 2 de la escala D.

b) Se desliza el cursor hasta que la línea se encuentre exactamente sobre el mismo valor 2 de la escala C, y debajo del trazo del cursor, en la escala A, se lee el resultado **16.** (Fig. 46).

Ejemplo 117. 5^4

a) Se desliza la reglilla hacia la izquierda hasta que su extremo derecho coincida con D 5.

b) Se coloca el cursor sobre el mismo valor 5 de la escala C, y el resultado se lee debajo de la línea, en A = 625. (Fig. 47).

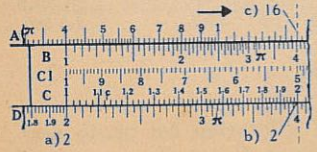


Fig. 46

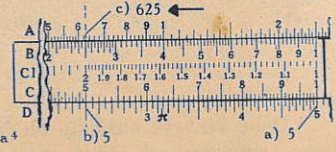


Fig. 47

Para obtener la raíz cuarta ($\sqrt[4]{a}$) se procede inversamente, colocando el número en la escala A y deslizando la reglilla hasta que el valor de la escala D sea el mismo que se ve en la escala C. Puede considerarse como ejemplo el de la figura anterior.

No está por demás agregar que con las escalas principales se puede obtener cualquier potencia de un número, teniendo en cuenta que la operación puede componerse en varios productos de factores iguales. Por ejemplo:

$$a^2 = a \times a$$
$$a^3 = a^3 \times a$$
$$a^4 = a^2 \times a^2 = (a \times a)^2$$
$$a^5 = a^3 \times a^2$$
$$a^6 = a^3 \times a^3 = (a^3)^2$$
$$a^7 = a^3 \times a^3 \times a = (a^3)^2 \times a, \text{ etc.}$$

Lo mismo puede decirse de las raíces y de las potencias y raíces combinadas.

Ejemplos:

$$\sqrt[6]{a^2} = \sqrt[3]{a}$$
$$\sqrt[4]{a} = \sqrt{\sqrt{a}}$$
$$\sqrt[6]{a} = \sqrt[3]{\sqrt{a}} = \sqrt{\sqrt[3]{a}}$$
$$\sqrt[4]{a^3} = \sqrt{a^{3/2}}$$
$$\sqrt[3]{a^2} = a^{2/3}, \text{ etc.}$$

EJERCICIOS (Potencias)

211.	$3^4 = 81$	216.	$2.4^{2/3} = 1.8$
212.	$1.2^4 = 2.07$	217.	$5.3^{2/3} = 3.04$
213.	$1.5^4 = 5.06$	218.	$1.18^5 = 2.3$
214.	$1.4^6 = 7.5$	219.	$1.18^4 = 1.94$
215.	$1.08^7 = 1.71$	220.	$1.9^4 = 13$

EJERCICIOS (Raíces)

221.	$\sqrt[4]{48} = 2.63$	226.	$\sqrt[6]{150} = 2.3$
222.	$\sqrt[4]{58} = 2.77$	227.	$\sqrt[4]{140} = 3.45$
223.	$\sqrt[4]{530} = 4.8$	228.	$\sqrt[9]{500} = 2$
224.	$\sqrt[4]{195} = 3.75$	229.	$\sqrt[8]{170} = 1.9$
225.	$\sqrt[6]{200} = 2.42$	230.	$\sqrt[4]{8.4} = 1.7$

LA ESCALA RECIPROCA CI

Esta escala es la C invertida y por consiguiente todo número dado en C tendrá por recíproco el correspondiente en CI, y viceversa.

Pueden ejecutarse las siguientes operaciones:

$$\frac{1}{a};\quad \frac{1}{a^2};\quad \frac{1}{\sqrt{a}};\quad \frac{1}{a^3};\quad \frac{1}{\sqrt[3]{a}}$$

$$\frac{1}{a}$$

Ejemplo 118. (Fig. 48).

$$(a)\quad \frac{1}{2} = 0.5$$

Se coloca el cursor en C 2, y el resultado se lee en la escala recíproca CI.

$$(b)\quad \frac{1}{25} = 0.04$$

$$(c)\quad \frac{1}{37} = 0.027$$

$$(d)\quad \frac{1}{490} = 0.00204$$

$$(e)\quad \frac{1}{5.4} = 0.185$$

$$(f)\quad \frac{1}{0.73} = 1.37$$

$$(g)\quad \frac{1}{0.08} = 12.5$$

Fig. 48

Colocación del punto decimal. Si el número tiene una cifra entera, la primera cifra significativa del recíproco ocupará el primer lugar después del punto decimal; si el número tiene dos cifras enteras, la primera cifra significativa ocupará el segundo lugar, etc.

Si el número es una fracción decimal menor que 1, el recíproco tendrá tantas cifras enteras en relación igual al lugar que ocupe en el número la primera cifra significativa después del punto decimal: si ocupa el primer lugar, el recíproco tendrá una cifra entera, si ocupa el segundo lugar, 2 cifras, si el tercero, tendrá 3 cifras, etc.

EJERCICIOS

231. $\frac{1}{1.3} = 0.769$

232. $\frac{1}{16} = 0.0625$

233. $\frac{1}{0.275} = 3.65$

234. $\frac{1}{0.004} = 250$

235. $\frac{1}{0.07} = 14.3$

236. $\frac{1}{0.0008} = 1250$

237. $\frac{1}{6450} = 0.000155$

238. $\frac{1}{14.6} = 0.0685$

239. $\frac{1}{208} = 0.0048$

240. $\frac{1}{\pi} = 0.318$

$$\frac{1}{a^2} = a^{-2}$$

Ejemplo 119. (Fig. 49).

$$\text{(a)} \quad \frac{1}{2.5^2} = 0.16$$

Se coloca el cursor en CI 2.5, el recíproco de 2.5^2 se encuentra en B = 0.16, o bien en la escala A con la reglilla en su posición original. (Debe tenerse cuidado en la colocación del punto decimal).

(b) $\frac{1}{2^2} = 0.25$

(c) $\frac{1}{3^2} = 0.111$

(d) $\frac{1}{4^2} = 0.0625$

(e) $\frac{1}{5^2} = 0.04$

Fig. 49

EJERCICIOS

241. $\frac{1}{1.7^2} = 0.348$

242. $\frac{1}{1.5^2} = 0.445$

243. $\frac{1}{15^2} = 0.00445$

244. $\frac{1}{2.8^2} = 0.128$

245. $\frac{1}{0.4^2} = 6.25$

246. $\frac{1}{6^2} = 0.0277$

247. $\frac{1}{7^2} = 0.0205$

248. $\frac{1}{2.5^2} = 0.16$

249. $\frac{1}{6.1^2} = 0.027$

250. $\frac{1}{1.4^2} = 0.51$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = a^{-\frac{1}{2}}$$

En este caso se coloca el cursor en la escala B y el recíproco se lee en CI. (Al utilizar la escala B o A, sígase la regla dada anteriormente cuando se trató de la raíz cuadrada, para saber si se usa la mitad izquierda o la mitad derecha).

Ejemplo 120. (Fig. 50).

$$(a)\quad \frac{1}{\sqrt{6}} = 0.408$$

Colocando el cursor en B_1 6 se lee el resultado en CI = 0.408.

$$(b)\quad \frac{1}{\sqrt{9}} = 0.0333$$

$$(c)\quad \frac{1}{\sqrt{16}} = 0.25$$

$$(d)\quad \frac{1}{\sqrt{22}} = 0.213$$

$$(e)\quad \frac{1}{\sqrt{60}} = 0.129$$

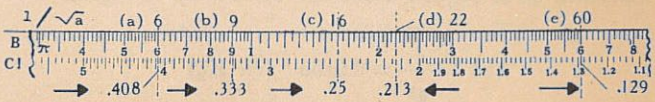


Fig. 50

EJERCICIOS

251. $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}} = 0.564$

252. $\dfrac{1}{\sqrt{4.5}} = 0.472$

253. $\dfrac{1}{\sqrt{255}} = 0.0625$

254. $\dfrac{1}{\sqrt{0.3}} = 1.83$

255. $\frac{1}{\sqrt{45}} = 0.149$

256. $\frac{1}{\sqrt{450}} = 0.0472$

257. $\frac{1}{\sqrt{2550}} = 0.0198$

258. $\frac{1}{\sqrt{0.084}} = 3.45$

259. $\frac{1}{\sqrt{0.84}} = 1.09$

260. $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$

$$\frac{1}{a^3} = a^{-3}$$

La escala recíproca se relaciona con la escala K, y para la colocación del punto decimal se tendrá en cuenta la regla dada al tratarse del cubo y de la raíz cúbica, así como lo indicado en los valores recíprocos.

Ejemplo 121. (Fig. 51).

$$(a)\ \frac{1}{2^3} = 0.125$$

Se coloca el cursor en el valor 2 de la escala recíproca CI y el resultado se lee en K = 0.125. (Si la escala K está impresa en la regla debe tenerse cuidado de que los extremos de la reglilla coincidan con los de la regla).

$$(b)\ \frac{1}{4^3} = 0.0156 \quad (\text{en } K_2)$$

$$(c)\ \frac{1}{9^3} = 0.00137 \quad (\text{en } K_1)$$

$$(d)\ \frac{1}{1.86^3} = 0.155 \quad (\text{en } K_3)$$

$$(e)\ \frac{1}{3.6^3} = 0.0214 \quad (\text{en } K_2)$$

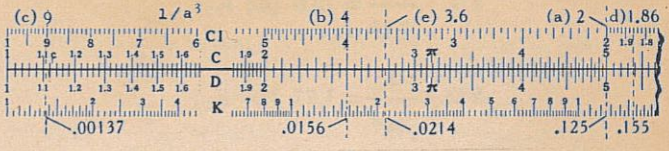


Fig. 51

EJERCICIOS

261. $\dfrac{1}{2.1^3} = 0.108$ (en K_3)

262. $\dfrac{1}{21^3} = 0.000108$ (en K_3)

263. $\dfrac{1}{4.2^3} = 0.0135$ (en K_2)

264. $\dfrac{1}{42^3} = 0.0000135$ (en K_2

265. $\dfrac{1}{5.7^3} = 0.0054$ (en K_1)

266. $\dfrac{1}{57^3} = 0.0000054$ (en K_1)

267. $\dfrac{1}{1.54^3} = 0.274$ (en K_3)

268. $\dfrac{1}{2.8^3} = 0.046$(en K_2)

269. $\dfrac{1}{6.6^3} = 0.0035$ (en K_1)

270. $\dfrac{1}{0.2^3} = 125$ (en K_3)

271. $\dfrac{1}{0.4^3} = 15.6$ (en K_2)

272. $\dfrac{1}{0.9^3} = 1.37$ (en K_1)

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}} = a - \tfrac{1}{3}$$

Ejemplo 122. (Fig. 52).

(a) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} = 0.794$

Colóquese el cursor en K_1 2 y el resultado se lee en CI = **0.794**.

(b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{20}} = 0.368$ (en K_2)

(c) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{200}} = 0.171$ (en K_3)

(d) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3.5}} = 0.66$ (en K_1)

(e) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{42}} = 0.288$ (en K_2)

(f) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{195}} = 0.172$ (en K_3)

Fig. 52

EJERCICIOS

273. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}} = 0.585$

274. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{42}} = 0.287$

275. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{240}} = 0.161$

276. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{0.004}} = 6.29$

277. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{0.04}} = 2.92$

278. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{0.4}} = 1.36$

279. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{315}} = 0.147$

280. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{48}} = 0.275$

281. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{1.95}} = 0.8$

282. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{11}} = 0.45$

USO DE LAS ESCALAS CF, DF (D π) y CIF

Estas escalas son muy útiles para obtener el producto de 3 ó más factores, así como operaciones combinadas de multiplicar y dividir, sin que sea necesario hacer muchos movimientos de la reglilla, ya que ésta queda en una posición muy conveniente.

En el producto de tres factores se usa también la escala recíproca CI.

Ejemplo 123. $2.2 \times 2.5 \times 6$.

a) Se hacen coincidir D **22** con CI **25**.

b) Se coloca el cursor en CF **6**, y el resultado se lee en DF = **33**. (Fig. 53).

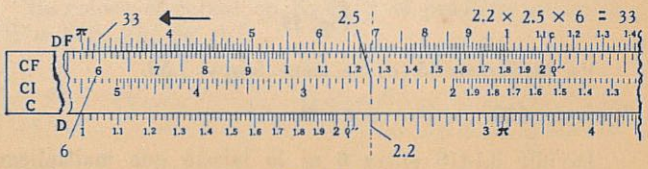


Fig. 53

Ejemplo 124.

$$\frac{53 \times 6.1}{15.4}$$

a) Coincidir D 5.3 con C 15.4.

b) Colocar el cursor en CF 6.1, y el resultado se lee en DF = 2.1. (Fig. 54).

Fig. 54

Resuélvanse por medio de estas escalas los ejercicios números 122 al 133, y del 139 al 143.

La escala DF o Dπ, como se designa en la regla de cálculo de 24 escalas "Velásquez", puede usarse también para obtener los siguientes valores:

$$a \times \pi;\ a/\pi;\ \pi/a;\ \pi\sqrt{a};\ \pi\sqrt[3]{a}$$

Ejemplo 125. $5 \times \pi$

Se coloca el cursor en D 5 y el resultado se encuentra en DF (Dπ) = 15.7. (Fig. 55 (a).

Ejemplo 126. $4/\pi$

Se coloca el trazo del cursor sobre el valor 4 de la escala DF y el resultado se lee en D = 1.27. Fig. 55 (b).

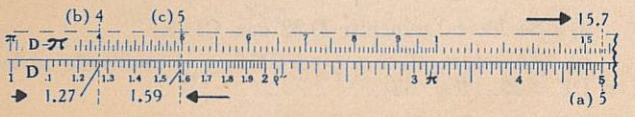


Fig. 55

En la figura 55 (c) se tiene $5/\pi = 1.59$.

Ejemplo 127. $\pi/6 = \pi \times 1/6$.

Dividir 3.1416 entre 6 es lo mismo que multiplicar por el recíproco de 6.

Se coloca el cursor en **6** de la escala recíproca CI, y el resultado se lee en DF = **0.523.**

La reglilla debe estar en su posición original. (Fig. 56).

Fig. 56

Ejemplo 128. $\pi\sqrt{3.6}$.

Se coloca el cursor en A_1 **3.6** y el resultado se lee en DF (D π) = **5.96.** Fig. 57 (a).

Ejemplo 129. $\pi\sqrt{36}$.

Colóquese el cursor en A_2 **36**, y el resultado se lee en DF = 18.8. Fig. 57 (b).

Fig. 57

Ejemplo 130. $\pi\sqrt[3]{8}$.

Puesto el cursor en K_1 **8**, el producto se lee en DF = **6.28.** Fig. 58 (a).

Ejemplo 131. $\pi\sqrt[3]{80}$.

Se coloca el cursor en K_2 **80**, y el producto se lee en DF = **13.5.** Fig. 58 (b).

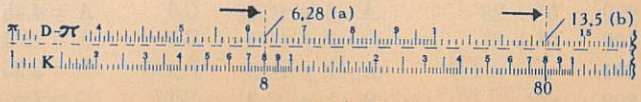


Fig. 58

EJERCICIOS

Es conveniente comprobar los resultados de los ejercicios siguientes practicando todo lo posible para adquirir el hábito de usar convenientemente las escalas.

Núm.	Operación:	Cursor en:	Respuesta en:
278.	7×3.1416	D 7	DF (D π) = 22
279.	$19 \times \pi$	D 19	DF = 59.7
280.	$42 \times \pi$	D 42	DF = 132
281.	$34.5 \times \pi$	D π 34.5	D = 11
282.	$88 \div \pi$	D π 88	D = 28
283.	$157 \div \pi$	D π 157	D = 50
284.	$\pi \div 4$	CI 4	Dπ = 0.785
285.	$\pi \div 180$	CI 180	Dπ = 0.0174
286.	$\pi \div 360$	CI 360	Dπ = 0.0087
287.	$\pi \sqrt{7}$	A_1 7	Dπ = 8.3
288.	$\pi \sqrt{70}$	A_2 70	Dπ = 26.2
289.	$\pi \sqrt{170}$	A_1 170	Dπ = 41
290.	$\pi \sqrt[3]{6}$	K_1 6	Dπ = 5.7
291.	$\pi \sqrt[3]{60}$	K_2 60	Dπ = 12.3
292.	$\pi \sqrt[3]{600}$	K_3 600	Dπ = 26.5

COMBINACIONES CON POTENCIAS Y RAICES

EJERCICIOS

Núm.	Operación:	Coincidir:	Cursor en:	Respuesta en:
293.	2×15^2	B 1 y A 2	C 15	A = 450
294.	38×5^2	B 10 y A 38	C 5	A = 950
295.	$42 \div 6^2$	A 42 y C 6	B 1	A = 1.17
296.	$7^2 \div 23$	D 7 y B 23	B 1	A = 2.13
297.	$2.5^2 \times 1.3^2$	C 1 y D 2.5	C 1.3	A = 10.5
298.	$35^2 \div 24^2$	D 35 y C 24	B 1	A = 2.13
299.	$5^3 \div 28$	A 5 y B 28	C 5	A = 4.45
300.	$9^3 \div 8^2$	D 9 y C 8	B 9	A = 11.4
301.	$\sqrt{3} \times 1.7$	B 1 y A 3	B 1.7	D = 2.25
302.	$\sqrt{3} \times 17$	B 1 y A 3	B 17	D = 7.1
303.	$\sqrt{88} \div 1.2$	A 88 y B 1.2	B 1	D = 8.55

Núm.	Operación	Coincidir:	Cursor en:	Respuesta en:
304.	$\sqrt{88 \div 12}$	A 88 y B 12	B 1	D = 2.7
305.	$\sqrt{7.6 \div 2.8}$	A 7.6 y B 2.8	C 1	D = 1.65
306.	$17 \div \sqrt{30}$	D 17 y B 30	C 10	D = 3.1
307.	$17 \div \sqrt{2}$	D 17 y B 2	C 1	D = 12
308.	$\sqrt{21/3.2}$	A 21 y C 32	C 1	D = 1.43
309.	$\sqrt{8/1.5}$	A 8 y C 1.5	C 1	D = 1.89
310.	$\sqrt{\pi/1.3}$	A π y C 1.3	C 1	D = 1.36

LA ESCALA LOGARITMICA L (de base 10)

Logaritmos, antilogaritmos, cologaritmos.

Esta escala se usa para obtener los logaritmos de los números y de las funciones trigonométricas. También pueden obtenerse antilogaritmos y cologaritmos.

Característica. Como se dijo anteriormente, la característica es la parte entera del logaritmo, y puede ser positiva o negativa. Si el número es mayor que 1 es positiva, y consta de tantas unidades como cifras tiene dicho número en su parte entera, menos uno.

Si el número es decimal, comprendido entre 0 y 1, la característica es negativa, y su valor absoluto es una unidad mayor al número de ceros decimales, entre el punto y la primera cifra significativa. En otros términos, puede decirse que la característica indica el número de orden de la primera cifra significativa después del punto decimal.

La mantisa, que es la parte decimal del logaritmo, se obtiene con facilidad por medio de la regla de cálculo, Cuando la escala L se encuentra en la regla, la mantisa se encuentra directamente con el cursor, el cual se coloca en la escala C o en la D, y la mantisa se lee en la escala logarítmcia L.

Ing. José Robles Uribe,

EJEMPLOS (Fig. 59)

132. log 150 = 2.176 (a)
133. log 0.0018 = 7.255 − 10 (b)
134. log 25 = 1.398 (c)

135. log 0.055 $= 8.740 - 10$ (d)
136. log 61 000 $= 4.785$ (e)
137. log 2.5 $= 0.398$ (f)

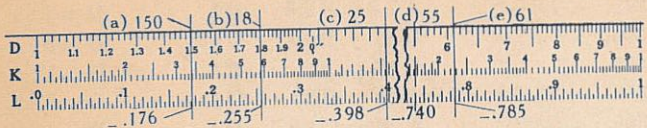


Fig. 59

Cuando la escala L se encuentra al reverso de la reglilla, la lectura de las mantisas es más difícil, pues es necesario hacer uso de un índice que se halla en la regla, y para cada valor será necesario un movimiento de la reglilla, lo cual, como es natural, hace que el proceso sea más lento y habrá mayor error de apreciación. Esto se evita cuando la reglilla pueda voltearse y en este caso el valor se encuentra utilizando solamente el cursor.

Ejemplo 138. Log 61 000.

a) Se hace coincidir C 61 con el extremo derecho de la escala D.

b) Se da vuelta a la regla, y el índice da el valor de la mantisa en la escala L = .785.

Solución: log 61 000 = 4.785. (Fig. 60).

(En el caso de que el índice se encuentre a la izquierda de la regla, la coincidencia deberá hacerse con el extremo izquierdo de la escala D).

Fig. 60

Es conveniente a veces transformar la característica negativa en positiva, para lo cual se obtiene lo que se llama **característica complementaria** sumando y restando 10; de esta manera el logaritmo se transforma en una expresión binomia.

Por ejemplo:

$$\log 0.241 = \overline{1}.382 = 9.382 - 10$$
$$\log 0.00241 = \overline{3}.382 = 7.382 - 10$$

EJERCICIOS

311. $\log 104 = 2.017$
312. $\log 10\ 400 = 4.017$
313. $\log 0.005 = \overline{3}.699 = 7.699 - 10$
314. $\log 0.075 = \overline{2}.875 = 8.875 - 10$
315. $\log 855 = 2.932$
316. $\log 35.8 = 1.554$
317. $\log 1.14 = 0.057$
318. $\log 2.36 = 0.372$
319. $\log 0.254 = \overline{1}.405 = 9.405 - 10$
320. $\log 0.0271 = \overline{2}.433 = 8.433 - 10$

Antilogaritmos. Se hacen los mismos movimientos, pero en sentido inverso. Se coloca el trazo del cursor en la escala L, considerando únicamente la parte decimal del logaritmo, es decir, la mantisa, pues la parte entera es la característica que sólo sirve para indicar la colocación del punto decimal.

La Fig. 59 ilustra los siguientes ejemplos. En la escala L se leen las mantisas y en la D los antilogaritmos.

Ejemplos: Escala L Escala D

138. antilog. $2.176 = 150$ (a)
139. antilog $\overline{3}.255 = 0.0018$ (b)
140. antilog $1.398 = 25$ (c)
141. antilog $\overline{2}.740 = 0.055$ (d)
142. antilog $4.785 = 61\ 000$ (e)

Cologaritmos. El cologaritmo de un número, es decir, el logaritmo del recíproco de un número, se obtiene muy fácilmente con la escala L y la recíproca CI (también puede utilizarse la escala C invertida). La reglilla debe estar en su posición original.

Para obtener la característica se toma en cuenta la posición del punto decimal del número. Si éste es entero la característica es negativa y consta de tantas unidades como cifras tenga el número en su parte entera. Si es una fracción decimal menor que 1, la característica es positiva, con tantas unidades como ceros haya entre el punto decimal y la primera cifra significativa.

Ejemplo 143. colog 225.

Se coloca el cursor en CI 225 y la mantisa del cologaritmo se lee en L = **.648.**

Solución: colog $225 = \overline{3}.648$. Fig. 61 (a).

Ejemplo 144. colog 26.

En L se lee .585. Fig. 61 (b).

Solución: colog $26 = \overline{2}.585$.

Ejemplo 145. colog 0.0042.

En L se lee .377. Fig. 61 (c).

Solución: colog $0.0042 = 2.377$.

Ejemplo 146. colog 5 300.

En L se lee .277. Fig. 61 (d).

Solución: colog $5\ 300 = \overline{4}.277$.

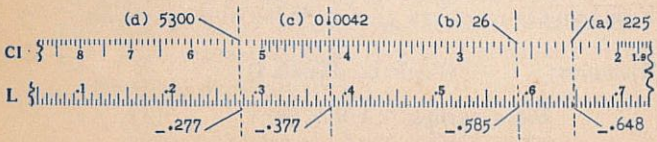


Fig. 61

EJERCICIOS

Núm.	Escala CI	Escala L
321.	colog 134	$= 7.873 - 10$
322.	colog 1.72	$= 9.765 - 10$
323.	colog 0.000205	$= 3.688$
324.	colog 0.0205	$= 1.688$
325.	colog 26	$= 8.585 - 10$

326. colog 2 $= 9.699 - 10$
327. colog 5 $= 9.301 - 10$
328. colog 40 $= 8.398 - 10$
329. colog 108 $= 7.966 - 10$
330. colog 12 $= 8.920 - 10$

(La característica negativa se convierte en positiva sumando y restando 10).

En algunas reglas de cálculo que tienen la escala logarítmica L al reverso de la reglilla, es necesario colocar primero el número de manera que coincida con el extremo de la regla, y en el reverso el índice da el valor en la escala L, como se ve en seguida.

Ejemplo 147. colog 172.

a) Se hacen coincidir **CI 172** con el extremo derecho de la regla.

b) Al reverso se encuentra la mantisa en L = .765. (Fig. 62).

Solución: colog $172 = 7.765 - 10$.

Fig. 62

OPERACIONES CON LOGARITMOS

Pueden ejecutarse una gran cantidad de operaciones por medio de los logaritmos: multiplicaciones, divisiones, potencias, raíces, operaciones combinadas, ecuaciones exponenciales, etc.

ECUACIONES EXPONENCIALES

(Resolución por medio de logaritmos)

Las ecuaciones exponenciales son aquellas en las que interviene la incógnita como exponente.

Forma: $a^x = b$

Ejemplo 148. $3^x = 48$.

Expresando por medio de logaritmos, se tiene:

$x \log 3 = \log 48$; y despejando la incógnita:

$$x = \frac{\log 48}{\log 3}$$

Ejecutando las operaciones indicadas:

Solución: $x = \dfrac{\log 48}{\log 3} = \dfrac{1.681}{0.477} = 3.53$

Ejemplo 149. $5^x = 1.36$

$$x \log 5 = \log 1.36$$

Solución: $x = \dfrac{\log 1.36}{\log 5} = \dfrac{0.134}{0.699} = 0.192$

Ejemplo 150. $2.4^{2x} = 1.87$

$$2x \log 2.4 = \log 1.87$$

$$2x = \frac{\log 1.87}{\log 2.4} = \frac{0.272}{0.380} = 0.715$$

Solución: $x = \dfrac{0.715}{2} = 0.3575$

Ejemplo 151. $0.82^x = 0.61$

$$x \log 0.82 = \log 0.61$$

$$x = \frac{\log 0.61}{\log 0.82} = \frac{\bar{1}.785}{\bar{1}.914} =$$

Transformando los logaritmos de característica negativa en sus equivalentes, enteramente negativos, se tiene:

$$= \frac{-1 + 0.785}{-1 + 0.914} = \frac{-0.215}{-0.086} = 2.5$$

Solución: $x = 2.5$.

Para transformar un logaritmo de característica negativa en un valor negativo equivalente, se procede como sigue:

Ejemplo 152. $\overline{1}.785 = -1.000 + 0\,785$

Solución: $= -0.215$

Ejemplo 153. $\overline{1}.914 = -1.000 + 0.914$

Solución: $= -0.086$

Si la incógnita es el índice de una raíz, se puede expresar como ecuación exponencial:

$$\sqrt[x]{a} = b$$

Elevando a la potencia **x** los dos miembros de la ecuación, se tiene:

$$a = b^x$$

Ejemplo 154. $\sqrt[x]{140} = 1.315$

$$\frac{\log 140}{x} = \log 1.315$$

Despejando la incógnita:

$$x = \frac{\log 140}{\log 1.315} = \frac{2.146}{0.119} = 18.1$$

Ejemplo 155. $\sqrt[x]{0\,38} = 0.81.$

$$\frac{\log 0.38}{x} = \log 0.81$$

Solución: $x = \dfrac{\log 0.38}{\log 0.81} = \dfrac{-0.420}{-0.092} = 4.6$

EJERCICIOS

341. $1.2^x = 26.5$; $x = 18$
342. $1.004^x = 1.0027$; $x = 675$
343. $8.2^x = 19$; $x = 1.4$
343. $190^x = 8.1$; $x = 0.142$
345. $0.87^x = 0.65$; $x = 3.1$
346. $0.05^x = 0.73$; $x = 0.105$
347. $\sqrt[x]{250} = 1.0215$; $x = 260$
348. $\sqrt[x]{1.5} = 13$; $x = 0.158$
349. $\sqrt[x]{1.5} = 1.026$; $x = 15.8$
350. $\sqrt[x]{0.97} = 0.992$; $x = 3.8$

Hay una gran variedad de reglas de cálculo que difieren en la situación de las escalas trigonométricas. Las reglas que las tienen en el cuerpo principal proporcionan mayor facilidad, pues basta usar el cursor para obtener los valores naturales y aun los logarítmicos al mismo tiempo y con menos error de apreciación. (Reglas de 25 cm. de Keuffel & Esser, Frederick Post, la de bolsillo de 24 escalas "Velásquez", y otras más).

La escala D proporciona el valor natural y la escala L el logarítmico, colocando el cursor en la escala trigonométrica. (Fig. 63).

Ejemplo 156. sen $30° = 0.500$
Ejemplo 157. log sen $30° = 9.699 - 10$
Ejemplo 158. tan $18°10' = 0.328$
Ejemplo 159. log tan $18°10' = 9.516 - 10$
Ejemplo 160. sen o tan $2° = 0.0349$
Ejemplo 161. log sen-tan $2° = 8.543 - 10$
Ejemplo 162. sen-tan $5'12'' = 0.00152$
Ejemlpo 163. log sen-tan $5'12'' = 7.182 - 10$

Para la colocación del punto decimal debe tenerse en cuenta la escala que se usa:

Si se utiliza la ST', el valor natural lleva dos ceros decimales después del punto.

Si es la ST, lleva un cero. Si se usa la escala S o la escala T, la primera cifra significativa ocupará el primer lugar después del punto decimal.

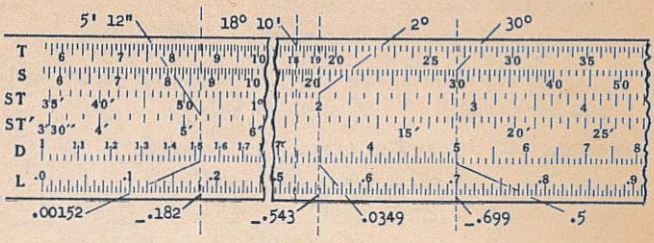


Fig. 63

Si la regla no contiene la escala ST, en tal caso la escala S está impresa con relación a las escalas A y B, y será en estas escalas en donde se encontrarán los valores naturales, pero con menor aproximación. Para el punto decimal se tiene en cuenta el lugar de la lectura: si el resultado se lee dentro de la mitad izquierda de la escala (límite entre 34′ y 5°44′), el valor natural lleva un cero después del punto decimal; si se lee dentro de la mitad derecha (límite entre 5°44′ y 90°), la primera cifra significativa ocupará el primer lugar después del punto decimal.

Si las escalas se encuentran al reverso de la reglilla, será necesario hacer lo mismo que cuando se trató de los logaritmos, usando el índice que se encuentra en la regla.

Algunas reglas de cálculo tienen la subdivisión centesimal, y en tal caso se considerarán los valores decimalmente. Por otra parte, para facilitar la lectura, tienen las escalas grabados los valores de las funciones de ángulos complementarios, coseno y cotangente, que se leen de derecha a izquierda como en la escala recíproca CI.

Para encontrar los valores de las demás funciones trigonométricas (coseno, cotangente, secante, cosecante, tangente mayor de 45°), se aplican las siguientes fórmulas:

Ejemplo 164. $\cos A = \text{sen}\ (90° - A)$.

$$\cos 25° = \text{sen}\ (90° - 25°) = \text{sen}\ 65° = 0.906$$

Ejemplo 165. $\cot A = \tan (90° - A)$
$\cot 78° = \tan (90° - 78°) = \tan 12° = 0.213$

Ejemplo 166. $\csc A = 1/\text{sen } A$
$\csc 40° = 1/\text{sen } 40° = 1.56$

Colocando el cursor en S 40° el resultado se lee en la escala recíproca CI = 1.56. Fig. 64 (a).

Ejemplo 167. $\text{Sec. } A = 1/\cos A = 1/\text{sen } (90° - A)$
$\sec 35° = 1/\text{sen } (90° - 35°)$
$= 1/\text{sen } 55° = 1.22$

Se coloca el cursor en S 55° y el resultado se lee en la escala recíproca CI = 1.22. Fig. 64 (b).

Ejemplo 168. $\tan A = 1/\tan (90° - A)$
$\tan 66° = 1/\tan (90° - 66°)$
$= 1/\tan 24° = 2.25$

Esta fórmula es conveniente para la tangente de ángulos mayores de 45°, y se usa también la escala recíproca CI. (Fig. 64 c).

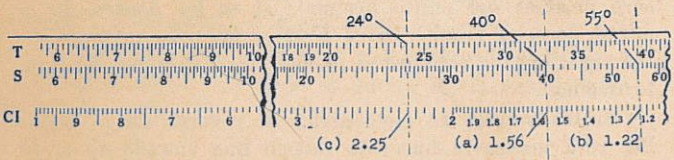


Fig. 64

EJERCICIOS

		Escalas:
351.	sen natural 3'45" = 0.00109	(ST' y D)
252.	log sen 3'45" = 7.037 − 10	(ST' y L)
353.	sen ó tan 9'50" = 0.00286	(ST' y D)
354.	log sen-tan 9'50" = 7.456 − 10	(ST' y L)
355.	sen-tan 2°35' = 0.045	(ST y D)
356.	log sen-tan 2°35' = 8.654 − 10	(ST y D)
357.	sen 30° = 0.5000	(S y D)
358.	log sen 30° = 9.699 − 10	(S y L)
359.	tan 33°20' = 0.658	(T y D)
360.	log tan 33°20' = 9.818 − 10	(T y L)

La característica en los logaritmos de las funciones de ST′ es -3; la de ST es -2; y la de S o T es -1. (Fig. 65).

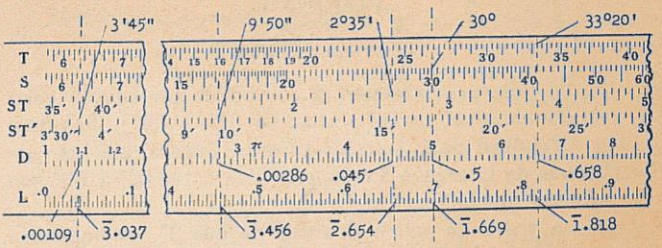


Fig. 65

Escalas:

361.	$\cos 47° = \operatorname{sen} 43° = 0.682$	(S y D)
362.	$\cos 52° = \operatorname{sen} 38° = 0.616$	(S y D)
363.	$\cos 86° = \operatorname{sen} 4° = 0.0698$	(ST y D)
364.	$\cos 89° = \operatorname{sen} 1° = 0.0175$	(ST y D)
365.	$\log \cos 10° = \log \operatorname{sen} 80° = 9.985 - 10$	(ST y L)
366.	$\cot 55° = \tan 35° = 0.700$	(T y D)
367.	$\tan 76° = 1/\tan 14° = 0.401$	(T y CI)
368.	$\csc 58° = 1/\operatorname{sen} 58° = 1.18$	(S y CI)
369.	$\csc 37° = 1/\operatorname{sen} 37° = 1.66$	(S y CI)
370.	$\sec 26° = 1/\cos 26° = 1/\operatorname{sen} 64° = 1.11$	(S y CI)

Si la regla de cálculo no contiene la escala ST para ángulos pequeños, puede hacerse la conversión de grados a radiantes.

Algunas reglas tienen impresas en las escalas C y D las marcas ϱ' y ϱ'' que se utilizan para obtener los valores naturales y logarítmico de ángulos muy pequeños (minutos y segundos). La regla de cálculo "Velásquez" contiene las 4 escalas T, S, ST y ST′.

IV. PROCEDIMIENTOS ESPECIALES

1) COS X CUANDO EL VALOR DE X ES MUY PEQUENO

(Fórmula especial)

Si es necesario obtener el coseno de un ángulo comprendido entre 0° y 10° (seno de 80° a 90°), hay una gran dificultad para leer los valores, puesto que las subdivisiones de la escala S comprendidas entre 80° y 90° son sumamente pequeñas.

Si se trata de saber el valor de cos 2°, es necesario encontrar el de sen 88°, y la escala S, relacionada con la escala D, no basta para dar una aproximación conveniente, pues sólo se obtendría para seno de 88°, al igual que para el seno de 85°, un mismo valor con una aproximación de 2 cifras decimales:

Para sen 85° = 0.99 = cos 5°

Para sen 88° = 0.99 = cos 2° (Fig. 66).

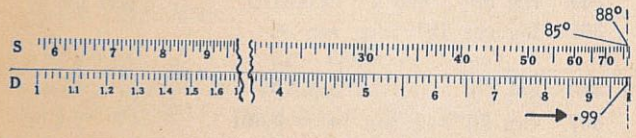


Fig. 66

Ahora bien, en estos casos en que el valor natural de la función se obtiene con una aproximación de sólo 2 cifras, es conveniente aplicar el siguiente desarrollo de funciones en serie, basado en los teoremas de **Taylor** y **Maclaurin**

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\ldots$$

de la que se toman los dos primeros términos para convertir el ángulo en valor natural con una aproximación de 4, 5 y hasta 6 cifras decimales. (No es necesario tener en cuenta más términos de la serie, puesto que el ángulo es muy pequeño y puede despreciarse mayor aproximación).

Ejemplo 169. cos 5° ó sen 85°

a) Se transforma el ángulo en radiantes:

Teniendo en cuenta la fórmula: $a° = \frac{\pi}{180} \times a$ (radiantes) se obtiene: $5° = \frac{\pi}{180} \times 5 = 0.0872$ radiantes.

b) Substituyendo en los dos primeros términos de la serie, se tiene:

$$\cos 5° = 1 - \frac{0.0872^2}{2} = 1 - \frac{0.0076}{2} = 1 - 0.0038$$

$$\begin{array}{r} 1.000 \\ -\ 0.0038 \\ \hline \end{array}$$

Solución: cos 5° ó sen85° = **0.9962**

El ejemplo anterior se resuelve con facilidad y rapidez usando la regla de cálculo.

Las operaciones que se ejecutan para convertir ángulos en radiantes, como se hizo en el ejemplo anterior, se simplifican utilizando el factor $(\pi/180)$ y como en el segundo término de la serie $(x^2/2)$ es necesario dividir entre 2 el cuadrado de $\pi/180$, se tiene una CONSTANTE (1525), puesto que:

$$\frac{(\pi/180)^2}{2} = 0.0001525$$

constante que se **multiplica siempre** por el cuadrado del ángulo y su complemento a 1 es el valor natural del coseno, de manera que en el ejemplo anterior se tiene:

$$\cos 5° = 1 - 0.0001525 \times 5^2$$
$$= 1 - 0.0038 = \mathbf{0.9962}$$

Ejemplo 170. cos 2° ó sen 88°

Solución: $\cos 2° = 1 - 0.0001525 \times 2^2$
$= 1 - 0.00061 = 0.99939$

Ejemplo 171. cos 4° ó sen 86°

Solución: $\cos 4° = 1 - 0.0001525 \times 4^2$
$= 1 - 0.00244 = 0.99756$

Para operar con la regla de cálculo se debe tener en cuenta la constante (1525) colocando el extremo izquierdo de la reglilla debajo de dicho valor dentro de la mitad izquierda de la escala A (Fig. 67), de esta manera en la escala C se leen los ángulos y en la escala A los complementos a 1. Los valores de la mitad derecha de la escala A llevan dos ceros decimales y los de la mitad izquierda 3 ceros.

Ejemplo 172. cos 5° ó sen 85°

a) Colóquese el extremo izquierdo de la reglilla debajo de (1525) dentro de la mitad izquierda de la escala A (Fig. 67).

b) Se pone el cursor en 5 de la escala C y en A se lee .0038 (Fig. 67 a).

Solución: cos 5° = 1 − 0.0038 = 0.9962 = sen 85°

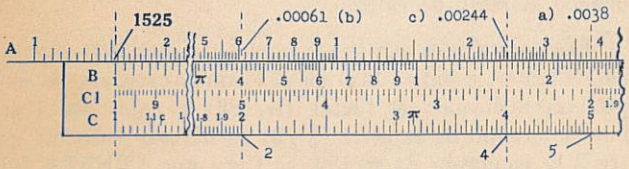


Fig. 67

Ejemplo 173. cos 2° ó sen 88°

Colocado el cursor en 2 de la escala C se lee .00061 en la escala A (mitad izquierda). (Fig. 67 b).

Solución: cos 2° = 1 − 0.00061 = 0.99939 = sen 88°

Ejemplo 174. cos 4° ó sen 86°

Colocado el cursor en 4 de la escala C se lee .00244 en la escala A. (Fig. 67 c).

Solución: cos 4° = 1 − 0.00244 = 0.99756 = sen 86°

Como las subdivisiones de la escala C están marcadas centesimalmente, cuando el ángulo contiene minutos es necesario primero considerarlo como una fracción decimal.

Para facilitar la conversión **sexagesimal a la centesimal**, puede hacerse esta operación con las escalas C y D, colocando el extremo derecho de la reglilla sobre el valor 60 de la escala D. Los minutos se leen en la escala D y su conversión decimal en grados en la escala C. (Fig. 68). Conviene agregar que cada 6 minutos es un décimo de grado, 15 minutos equivalen a 0.25°, 30′ = 0.5°, etc. (en valores angulares); así es que 3° 48′ = 3.8°; 5° 30′ = 5.5°; 7° 15′ = 7.25°, etc.

Ejemplos (Fig. 68).

175. 45′ = 0.75°
176. 39′ = 0.65°
177. 31′ = 0.515°
178. 27′ = 0.45°
179. 15′ = 0.25°

Fig. 68

Ejemplo 180. Cos 3° 48′ = 3.8° = **0.9978.**

a) Se hacen coincidir el extremo izquierdo de la reglilla con (1525) de la mitad izquierda de la escala A.

b) Colocado el cursor en 3.8 de la escala C se lee .0022 en la escala A. (Fig. 69 a).

Solución: cos 3° 48′ = 1 − 0.0022 = 0.9978.

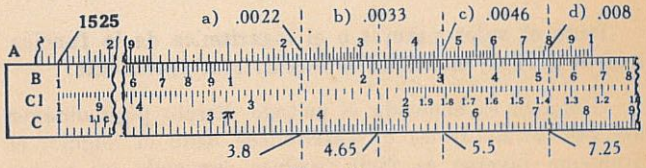


Fig. 69

Ejemplo 181. Cos 4° 39′ = cos 4. 65° = 0.9967.

Se coloca el cursor en 4.65 de la escala C y en la escala A se lee 0.0033. (Fig. 69 b).

Solución: cos 4° 39′ = 1 − 0.0033 = **0.9967**

Ejemplo 182. cos 5° 30′ = cos 5.5° = 0.9954

Colocado el cursor en 5.5 de la escala C se lee en A .0046. (Fig. 69 c).

Solución: cos 5° 30′ = 1 − 0.0046 = 0.9954

Ejemplo 183. cos 7° 15′ = cos 7.25° = 0.992

Puesto el cursor en 7.25 de la escala C se lee en A .008. (Fig. 69 d).

Solución: cos 7° 15′ = 1 − 0.008 = 0.992.

NOTA: Si se hace frecuente uso de estos valores debe señalarse la constante (1525) en la mitad izquierda de la escala A, como en la regla 'Velásquez''.

EJERCICIOS

(Conviértanse primero los minutos a fracción decimal)

371. cos 1° 15′ = 0.99976 = sen 88° 45′
372. cos 2° 15′ = 0.99923 = sen 87° 45′
373. cos 3° 30′ = 0.99813 = sen 86° 30′
374. cos 3° 54′ = 0.9977 = sen 86° 6′
375. cos 4° 12′ = 0.9973 = sen 85° 48′
376. cos 4° 48′ = 0.9965 = sen 85° 12′
377. cos 5° 30′ = 0.9954 = sen 84° 30′
378. cos 6° = 0.9945 = sen 84°
379. cos 2° 48′ = 0.9988 = sen 87° 12′
380. cos 2° 12′ = 0.99926 = sen 87° 48′

Dado el valor natural o el logarítmico de la función trigonométrica, encontrar el ángulo correspondiente.

Como ya es conocido el método directo para obtener los valores naturales o logarítmicos dado el ángulo, el problema inverso es fácil resolver siguiendo un procedimiento opuesto:

Se coloca el cursor en el valor natural o en el logarítmico, según el caso, y el ángulo se encuentra en la escala trigonométrica correspondiente.

Como ejemplos pueden considerarse los ejercicios 351 a 360 ilustrados con la figura 65.

EJERCICIOS

Resuélvanse los comprendidos entre el 351 y 370.

Por lo que se refiere al sen x cuando x está comprendido entre 80° y 90°, el método a seguir es completamente opuesto al que se aplicó en los ejemplos 169 a 183.

EJERCICIOS

Resuélvanse los comprendidos entre el 371 y 380.

ESCALA PITAGORICA (P). La regla de cálculo Darmstadt contiene esta escala, y sirve para obtener los valores del seno y del coseno.

En trigonometría tenemos la siguiente relación:

$$\text{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$$

Restando $\text{sen}^2 A$ a los dos miembros de la igualdad:

$$\cos^2 A = -\text{sen}^2 A$$

Extrayendo raíz cuadrada:

$$\cos A = \sqrt{1 - \text{sen}^2 A}$$

Si consideramos que sen $A = x$, se tiene:

$$\cos A = \sqrt{1 - x^2}$$

Con esta escala es fácil hallar los valores relacionándola con la escala E.

Colocando el cursor en cualquier valor de la escala S, se lee en P el valor del coseno, con mayor aproximación que la que se obtiene cuando se utilizan únicamente las escalas trigonométricas.

Sin embargo, teniendo en cuenta el procedimiento especial expuesto en los ejemplos 169 a 183, la escala pitagórica ya no es necesaria, puesto que transformando el ángulo en radiantes se obtiene mayor aproximación.

ANGULOS MAYORES DE 90°

Cuando un ángulo es mayor de 90°, es conveniente reducirlo a otro que esté comprendido entre 0° y 90°, para obtener ya sea el valor natural, o bien el logarítmico, usando las tablas o la regla de cálculo.

Se puede establecer una fórmula de fácil y rápida aplicación con el objeto de reducir cualquier función trigonométrica de cualquier ángulo, a otra equivalente en que el ángulo se encuentre comprendido entre 0° y 90°.

FORMULAS ESPECIALES:

Función $(n\,90° + A) = |$ Función A $|$

Función $[(n+1)\,90° + A] = |$ Cofunción A $|$
(cuando **n** es número par).

Además debe tenerse en cuenta el signo de la función, según su valor, pues las fórmulas no indican el signo. Para esto es conveniente tener en cuenta el siguiente cuadro:

Angulos:	0° a 90°	90° a 180°	180° a 270°	270° a 360°
sen y cos	+	+	−	−
cos y sec	+	−	−	+
tan y cot	+	−	+	−

Ejemplo 184. sen 115°

a) sen 115° = sen (90° + 25°)

b) Como 90° se toma una vez, es decir, un número impar de veces, se usa la confunción correspondiente.

Solución: sen 115° = cos 25°

Puede también darse el valor de la función complementaria, así:

sen 115° = cos 25° = sen 65°

(Como sen 115° se encuentra entre 90° y 180°, su valor es positivo).

Ejemplo 185. sen 200°

a) sen 200° = sen (2 × 90 + 20°)

b) Como 90 se considera un número par de veces, se usa la misma función.

Solución: sen 200° = − sen 20°

(Como sen 200° está comprendido entre 180° y 270°, su valor es negativo).

Ejemplo 186. sen 305°

a) sen 305° = sen (3 × 90° + 35°)
b) Como 90° se toma tres veces, se usa la confunción.

Solución: sen 305° = − cos 35°

(El valor es negativo puesto que sen 305° se encuentra entre 270° y 360°).

Ejemplo 187. sen 500°

a) sen 500° = sen (5 × 90° + 50°)
b) sen 500° = cos 50°

(Para saber el signo se resta una o más veces 360°, según el valor, en este caso 500° − 360° = 140°. Por consiguiente su valor es positivo, pues 140° se halla comprendido entre 90° y 180°).

Ejemplo 188. cot 910°

a) cot 910° = cot (10 × 90° + 10°)
b) cot 910° = **cot.10°**

(Restando a 910° el producto 2 × 360°, se obtiene 910° − 720 = 190°, y como este valor se encuentra entre 180° y 270° y la función es cotangente, el resultado es positivo).

Ejemplo 189. sec 280°

a) sec 280° = sec (3 × 90° + 10°)
b) sec 280° = + csc 10°

(La sec 280° es positiva por tener un valor comprendido entre 270° y 360°).

EJERCICIOS

381. sen 412° = sen 52°
382. sen 320° = − cos 50°
383. cot 110° = − tan 20°
384. sen 100° = cos 10°
385. sec 113° = − csc 23°
386. sec 205° = − sec 25°
387. tan 317° = − cot 47°
388. tan 200° = tan 20°
389. sen 114° = cos 24°
390. cos 312° = sen 42°

2) EL CALCULO DIFERENCIAL EN LA REGLA DE CALCULO

Uso del Cálculo Diferencial para obtener mayor aproximación en las raíces cuadradas utilizando los cuadrados de los números. (Procedimiento exclusivo del autor).

Obtención de la fórmula: El lado de un cuadrado puede dividirse en dos segmentos y en tal caso el equivalente del área del cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los segmentos más el doble producto de dichos segmentos.

Es decir, si consideramos **a** y **x** los segmentos en que se divide el lado de un cuadro, se tiene:

$$(a + x)^2 = a^2 + 2ax + x^2 \quad \text{(Fig 70)}$$

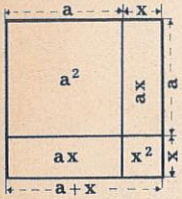


Fig. 70

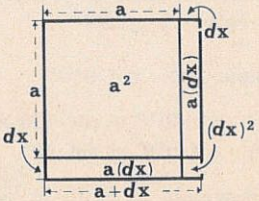


Fig. 71

Si el lado del cuadrado se divide en dos segmentos de tal manera que uno de ellos sea muy pequeño, se puede desechar una pequeña diferencia, que en este caso sería el cuadrado del segmento menor.

Considerando **x** como una diferencia muy pequeña, es decir, el segmento **dx**, que no indica **d** × **x**, sino una cantidad pequeñísima comparada con **x**, puede escribirse:

$$(a + dx)^2 = a^2 + 2a\ (dx) + (dx)^2 \quad \text{(Fig 71)}$$

el valor $(dx)^2$ es tan pequeño que puede despreciarse, y se tiene, cambiando los miembros de la igualdad:

$$a^2 + 2a(dx) = (a + dx)^2$$

o bien, despejando diferencial x:

$$dx = \frac{(a + dx)^2 - a^2}{2a}$$

lo cual puede aplicarse para obtener mayor aproximación en las raíces cuadradas.

Por ejemplo, la raíz cuadrada de 915 ó 9.15 se calcula con mayor aproximación teniendo en cuenta que la raíz cuadrada más cercana a 915 es 30, y siendo 900 el cuadrado de 30, se tiene que:

$$a^2 = 30^2; \qquad (a + dx)^2 = 915$$

substituyendo valores:

$$dx = \frac{(a + dx)^2 - a^2}{2a} = \frac{915 - 900}{2 \times 30} = \frac{15}{60} = 0.25$$

y este valor 0.25 se coloca a continuación de 30.

Solución: $\sqrt{915} = 30.25$
ó $\sqrt{9.15} = 3.025$

Para extraer la raíz cuadrada de 8285 ó 82.85 se procede como en el caso anterior, teniendo cuidado de ver en una tabla de cuadrados o en la regla de cálculo el mayor cuadrado contenido en 8285, que es $91^2 = 8281$ (véase la figura 37).

Substituyendo valores:

$$dx = \frac{8285 - 8281}{2 \times 91} = \frac{4}{182} = .022$$

Solución: $\sqrt{8285} = 91.022$
ó $\sqrt{82.85} = 9.1022$

Como un tercer eejmplo podemos considerar $\sqrt{3400}$ ó $\sqrt{34}$.

La raíz más aproximada es 58 cuyo cuadrado es 3364 (véanse ejemplos 89 a 94), y se tiene

$$dx = \frac{3400 - 3364}{2 \times 58} = \frac{36}{116} = 0.31$$

Solución: $\sqrt{3400} = 58.31$; ó $\sqrt{34} = 5.831$

RESOLUCION POR REGLA DE CALCULO

Todos los valores anteriores pueden obtenerse más fácil y rápidamente con cualquier regla de cálculo que contenga las 4 escalas fundamentales: A, B, C y D.

Teniendo en cuenta que es lo mismo dividir entre 2 que multiplicar por 0.5, la expresión puede escribirse así:

$$dx = \frac{(a + dx)^2 - a^2}{2a} = \frac{(a + dx)^2 - a^2}{a} \times 0.5$$

El valor 0.5 es una constante que se leerá siempre en la escala C.

Ejemplo 190. $\sqrt{915}$.

a) Se coloca el cursor en 915 de la escala A (mitad izquierda).

b) En la escala D se lee 30 más una pequeña fracción difícil de apreciar.

c) Se coloca 5 de la escala C sobre 30 de la escala D.

d) El cuadrado de 30 es 900 y la diferencia a 915 es 15. Se coloca el cursor en 15 de la escala D y en C se lee .25, valor que debe colocarse a continuación de 30. (Fig. 72).

Solución: $\sqrt{915} = 30.25$.

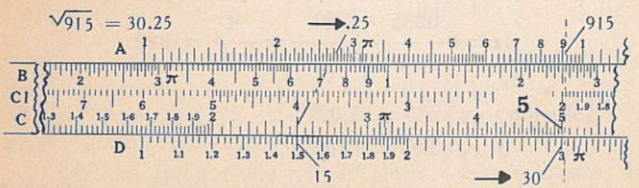


Fig. 72

Ejemplo 191. $\sqrt{8285}$.

a) Se coloca el cursor (aproximadamente) en 8285 (cerca de 83).

b) En D se lee 91 más una pequeña fracción.

c) Se coloca 5 de la escala C sobre 91 de la escala D.

d) El cuadrado de 91 es 8281 (véase Fig. 37). La diferencia entre 8285 y 8281 es 4. Se coloca el cursor en 4 de la escala D y en C se lee 22. (Fig. 73).

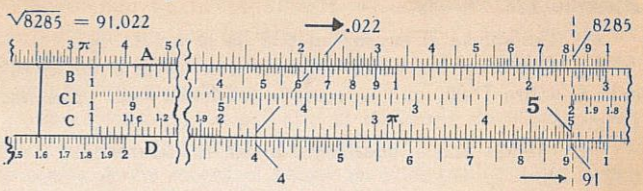


Fig. 73

Solución: $\sqrt{8285} = 91.022$.

NOTA: Como la diferencia entre 8285 y 8281 es 4, es decir contiene una cifra entera, debe considerarse la aproximación 22 como .022.

Si la diferencia contiene dos cifras enteras, en tal caso no deberá incluirse el cero, como en los ejemplos que siguen:

Ejemplo 192. $\sqrt{3500}$.

a) Se coloca el cursor en 3500 de la escala A_2

b) Se pone 5 de la escala C sobre 59 de la escala D (raíz cuadrada más próxima).

c) El cuadrado de 59 es 3481. (Para la terminación del cuadrado de 59 ténganse en cuenta las instrucciones dadas en el ejemplo 94, en el que se eleva al cuadrado la difrencia a 50, es decir: $9^2 = 81$).

d) $3500 - 3481 = 19$. Sobre 19 de la escala D se lee en C el valor 161. (Fig. 74).

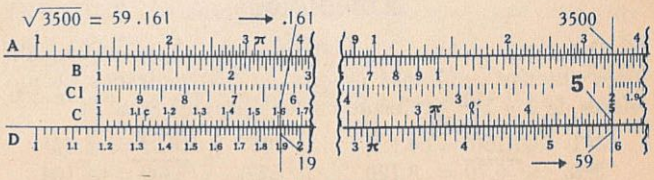


Fig. 74

Solución: $\sqrt{3500} = 59.161$.

NOTA: Hay ocasiones en que es necesario un doble deslizamiento de la reglilla, como se verá a continuación:

Ejemplo 193. $\sqrt{632}$.

a) Colóquese el cursor en 632 de la escala A.

d) Como en los casos anteriores se pone 5 de la escala C sobre D 25, que es la raíz cuadrada más próxima. (Fig. 75).

c) Siendo 625 el cuadrado de 25, la diferencia $632 - 625 = 7$.

d) Como es necesario colocar el cursor en D 7 y este valor queda fuera de la reglilla, se desliza ésta hacia la derecha de manera que su extremo izquierdo coincida con el extremo derecho de la escala D (movimiento que se hace con ayuda del cursor). (Fig. 75 a).

e) Sobre el valor 7 de la escala D se lee 14 en la escala C.

Solución: $\sqrt{632} = 25.14$.

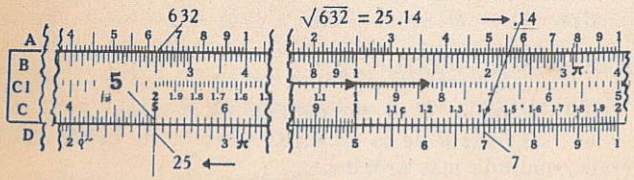


Fig. 75

NOTA: En el ejemplo anterior, a pesar de tener la diferencia solo una cifra entera (7) el valor encontrado (.14) no lleva cero decimal por haberse deslizado la reglilla dos veces.

EJERCICIOS

Practique primero suficientemente el procedimiento para obtener resultados exactos en los cuadrados de números de 1 a 100 explicado en los ejemplos 85 a 94.

391. $\sqrt{3150} = 56.125$
392. $\sqrt{9.79} = 3.129$
393. $\sqrt{9.81} = 3.132$
394. $\sqrt{16.2} = 4.025$
395. $\sqrt{16.3} = 4.037$
396. $\sqrt{16.33} = 4.041$
397. $\sqrt{8300} = 91.104$
398. $\sqrt{83} = 9.1104$
399. $\sqrt{3420} = 58.48$
400. $\sqrt{3370} = 58.0517$

Aplicación del Cálculo Diferencial en los cuadrados de los números.

Siguiendo un procedimiento completamente opuesto a lo indicado en los ejemplos anteriores (190 a 193), se puede obtener el cuadrado de números que contengan una o dos cifras decimales.

Por ejemplo, para calcular el cuadrado de 30.25 se hacen coincidir primeramente D 30 con C 5 y se lee 900 en la escala A. Se coloca el cursor en C 25 (valor de la parte decimal de 30.25) y en D se lee 15, que es la diferencia que se debe agregar a 900. (Fig. 72).

Solución: $30.25^2 = 915$.

El mismo procedimiento puede seguirse en casos análogos.

3) CALCULO DEL TEOREMA DE PITAGORAS. (Con un solo movimiento de la reglilla). (Procedimiento exclusivo del autor).

Existen varias maneras para calcular el Teorema de Pitágoras por medio de la regla de cálculo, pero en todas se requiere un doble deslizamiento de la reglilla o bien la adición o substracción de dos cantidades.

El Teorema de Pitágoras: EL CUADRADO CONSTRUIDO SOBRE LA HIPOTENUSA ES IGUAL A LA SUMA DE LOS CUADRADOS CONSTRUIDOS SOBRE LOS CATETOS, puede calcularse por medio de un procedimiento trigonométrico muy sencillo utilizando las reglas de cálculo que tienen las escalas S y T en el cuerpo principal de la regla.

Este teorema, además de aplicarse en geometría, tiene otras aplicaciones en algunos problemas de RADIO-ELECTRICIDAD. En circuitos en serie que contienen inductancia y resistencia o capacidad y resistencia, se calcula la impedancia (Z) que es la oposición total de un circuito al paso de la corriente alterna, por las fórmulas:

$$Z = \sqrt{R^2 + Z^2L} \qquad Z = \sqrt{R^2 + X^2C}$$

DESARROLLO:

Pasando del valor de la tangente de un ángulo al seno del mismo ángulo se obtiene la hipotenusa.

Ejemplo 194. (Fig. 76).

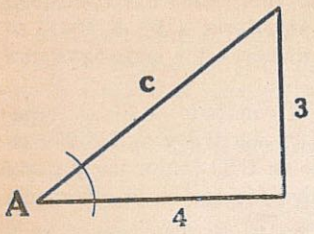


Fig. 76

$$\text{Tan } A = \frac{3}{4} = 0.75$$

$$\text{Sen } A = \frac{3}{c}$$

$$\therefore c = \frac{3}{\text{Sen } A} \quad \ldots (1)$$

Si tan A = 0.75 se obtiene el valor del ángulo A. Se coloca el cursor en D 75 y se lee en T el valor 37° (aproximadamente).

Una vez obtenido 37° se busca el valor del Sen 37° = 0.6, y se tiene, substituyendo en (1)

$$c = \frac{3}{\text{Sen } A} = \frac{3}{0.6} = 5 \text{ (resultado)}$$

Las reglas de cálculo que tienen las escalas trigonométricas en el cuerpo principal de la regla resuelven rápida y fácilmente estos problemas. (Se utilizan las escalas D, C, CI, T y S).

Ejemplo 195. (Clásico). a = 3; b = 4; c = ? = ò

a) Se hacen coincidir **(siempre)** el extremo izquierdo de la reglilla con el valor del **cateto menor** en la escala D, en este caso D 3.

b) Se coloca el cursor sobre el valor del cateto mayor en la escala recíproca, es decir, CI 4, y se lee en la escala T el valor 36° 40'.

c) Se desliza el cursor hacia la izquierda hasta 36° 40' de la escala S, y en la escala recíproca CI se lee el resultado = 5. (Fig. 77).

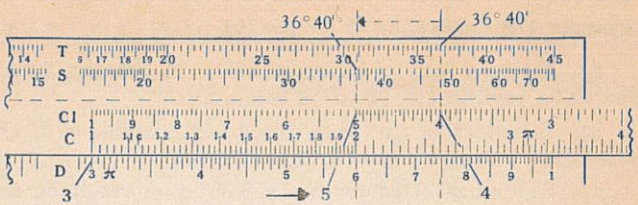


Fig. 77

Ejemplo 196. $a = 24.2$; $b = 26$; $c = ? = 35.5$

a) Se coloca el extremo izquierdo de la reglilla sobre D **24.2.**

b) Puesto el cursor en 26 de la escala recíproca CI se lee en T el valor **43°.**

c) Se desliza el cursor hacia la izquierda hasta S **43°** y se lee en CI el resultado $= 35.5$. (Fig. 78).

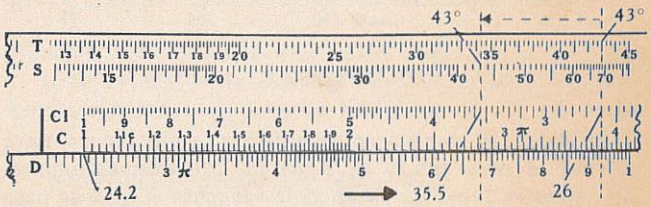


Fig. 78

Ejemplo 197. $a = 27$; $b = 41.5$; $c = ? = 49.5$

a) Coincidir el extremo izquierdo de la reglilla con D **27.**

b) Colocar el cursor en 41.5 de la escala CI y se lee en T el valor **33°.**

c) Deslizar hacia la izquierda el cursor hasta S **33°** y se lee en CI el resultado $= 49.5$. (Fig. 79).

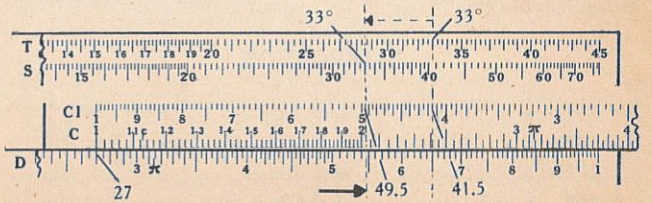


Fig. 79

Ejemplo 198. a = 95; b = 164; c = ? = 190

a) En este caso se hacen coincidir el **extremo derecho** de la reglilla con **95** de la escala D.

b) Se coloca el cursor en **164** de CI y se lee en T el valor **30°**.

c) Se desliza el cursor hasta S 30° y el resultado se encuentra debajo de la línea del cursor, en CI = **190**. (Fig. 80).

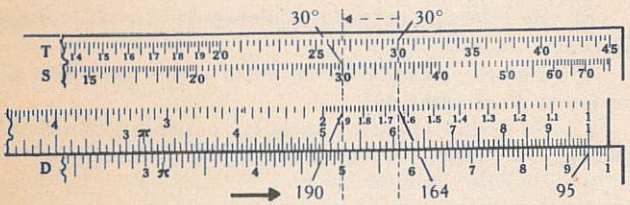


Fig. 80

NOTA: Si se conocen un cateto y la hipotenusa, para obtener el otro cateto se sigue un procedimiento parecido, pero en lugar de pasar de la tangente al seno se pasa de éste a la tangente. Como ejemplos pueden servir los anteriores, considerando conocidos el cateto menor y la hipotenusa, y se utiliza primero la escala S y después la escala T. Si los datos conocidos fueren el cateto mayor y la hipotenusa, es decir, si al colocar el cursor en el valor de la hipotenusa en la recíproca CI se lee en S un vayor mayor que 45°, sería necesario seguir un procedimiento completamente diferente, en el cual sólo se utilizaría la escala trigonométrica S, considerando el ángulo complementario.

EJERCICIOS

401. a = 1.67; b = 2.5; c = ? = 3
402. a = 182; b = 270; c = ? = 326
403. a = 22.5; b = 40.5; c = ? = 46.3
404. a = 84; b = 180; c = ? = 199
405. a = 9.2; b = 12.2; c = ? = 15.3

4) FORMULA DE LA RESONANCIA, DE THOMSON

$$\text{Fórmula:}\quad F = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

que puede expresarse así:

$$Fkc = \frac{159\ 000}{\sqrt{L\mu h \times C\mu\mu fd}}$$

Fkc = frecuencia en kilociclos.
Lμh = frecuencia en microhenrios.
Cμμfd = capacidad en micromicrofaradios.

Ejemplo 199. ¿A qué frecuencia funciona el oscilador si la capacidad es de 205 micromicrofaradios y la inductancia aparente que posee la bobina es de 440 microhenrios?

(Procedimiento exclusivo del autor).

a) Colóquese el cursor en D 159 y hágase coincidir con la línea el valor 205 de la escala B.

b) Se desliza el cursor hacia la derecha hasta 440 de la escala A y en la escala recíproca, debajo de la línea del cursor, se encuentra la respuesta Fkc = **530 kilociclos.** (Fig. 81 a).

(Puede también usarse primero el valor **440** en la escala B y después 205 en la escala A; el resultado siempre será el mismo).

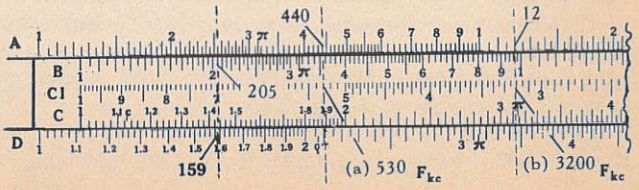


Fig. 81

Con la figura anterior se tiene una tabla de valores en la cual, si se considera 205 como micromicrofaradios, se leen en la escala A los microhenrios y en la escala recíproca CI la frecuencia en kilociclos. Si el valor 205 representa microhenrios, en la escala A se leen los micromicrofaradios.

Debe tenerse cuidado al obtener el resultado, pues a menor capacidad e inductancia corresponde mayor frecuencia (están en razón inversa).

También hay que considerar el número de cifras enteras de los factores, utilizando la mitad izquierda de las escalas A y B para cantidades que tienen un número impar de cifras enteras, y la mitad derecha cuando es par.

Como ilustración sirva el siguiente ejemplo:

Ejemplo 200. ¿A qué frecuencia funciona el oscilador si la capacidad es de 205 micromicrofaradios y la inductancia aparente que posee la bobina es de 12 microhenrios?

a) Con ayuda del cursor se hacen coincidir D 159 con B 205. (Fig. 81).

b) Se desliza el cursor a la derecha hasta 12 de la escala A (mitad derecha) y en la escala recíproca CI se lee 3200 kilociclos. (Fig. 81 b).

Si los datos que se proporcionan son kilociclos y micromicrofaradios (o microhenrios), para obtener los microhenrios (o micromicrofaradios) se procede inversamente.

Ejemplo 201. 205 $\mu\mu$fd; 530 kc; Resp. 440 microhenrios.

a) Coincidir D 159 con B 205. (Fig. 81).

b) Se coloca el cursor en 530 de la escala recíproca CI y la respuesta se lee en A 440 microhenrios. (Fig. 81 a).

Conviene hacer hincapié en la importancia que tiene el considerar la mitad izquierda de las escalas A y B para cantidades que contienen impar de cifras enteras, y la mitad derecha para las que tienen número par.

Ejemplo 202. 920 $\mu\mu$fd; 19 μh; Resp: 1200 kilociclos..

Se hacen coincidir D 159 con B 920. Colocado el cursor en A 19 se lee en CI el resultado: 1200 kilociclos. (Fig. 82).

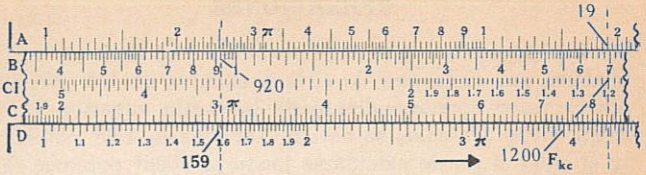


Fig. 82

EJERCICIOS

Se dan dos elementos cualesquiera y se obtiene el otro.

	Capacidad $\mu\mu$ fd.	Inductancia μ h.	Frecuencia kc.
406.	250	300	580
407.	200	400	563
408.	260	200	700
409.	380	290	480
410.	430	170	590
411.	42	350	1310
412.	60	15	5300
413.	60	150	1680
414.	80	40	2820
415.	80	400	890

(Los ejercicios 412, 414 y 415 requieren dos movimientos de la reglilla).

V.—ESCALAS LOG. LOG. (Directas)
(LL_1, LL_2, LL_3, LL_4) *

Generalmente las reglas de cálculo de 25 cm. (de escritorio) son las que incluyen estas escalas, como la Post-Trig. la Keuffel (3 escalas), la Regla Darmstadt, la Elektro Fáber (Néstor y Alcayde). Entre las reglas de bolsillo (15 cm.) únicamente la Regla de 24 escalas "Velásquez" contiene estas cuatro escalas Log. Log. (Fig. 83).

---

* IMPORTANTE.—Véase el último párrafo de la página 10.

OPERACIONES

1ª Operación: Las subdivisiones están situadas de tal manera que cada una de ellas encuentra su 10ª potencia en el valor correspondiente de la escala superior. Si la regla tiene 3 escalas se obtiene también la 100ª potencia, y si tiene 4 puede calcularse hasta la 1000ª potencia. En todos estos casos sólo se utiliza el cursor.

Ejemplo 203.	1.00215^{10}	$= 1.0217$	(Fig. 83 a)
Ejemplo 204.	1.00215^{100}	$= 1.24$	(Fig. 83 b)
Ejemplo 205.	1.00215^{1000}	$= 8.6$	(Fig. 83 c)
Ejemplo 206.	1.017^{10}	$= 1.184$	(Fig. 83 d)
Ejemplo 207.	1.017^{100}	$= 5.4$	(Fig. 83 e)
Ejemplo 208.	1.46^{10}	$= 44$	(Fig. 83 f)
Ejemplo 209.	1.7^{10}	$= 200$	(Fig. 83 g)

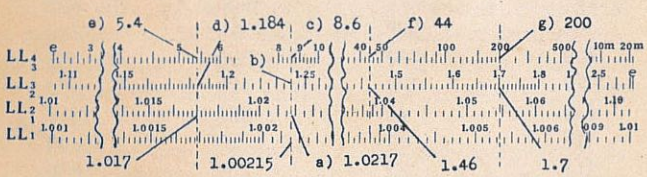


Fig. 83

2ª Operación: Procediendo inversamente se obtienen las raíces 10, 100 ó 1000.

Pueden considerarse como ejemplos los anteriores.

Ejemplo 210. $\sqrt[10]{1.0217} = 1.00215$ (Fig. 83 a)

Ejemplo 211. $\sqrt[100]{5.4} = 1.017$ (Fig. 83 e)

Ejemplo 212. $\sqrt[10]{44} = 1.46$ (Fig. 83 f)

Ejemplo 213. $\sqrt[10]{200} = 1.7$ (Fig. 83 g)

3ª Operación: Por medio de la escala D se obtienen las potencias del número e (2.718...), tanto enteras como decimales. Debe tenerse en cuenta que $e^1 = 2.718...$ y $e^{10} = 22\ 000$ (aprox.), y que las potencias desimales se encuentran en las escalas inmediatas inferiores, sin mover el cursor. (Fig. 84).

Ejemplo 214. $e^{3} = 20$ (Fig. 84 a)
Ejemplo 215. $e^{.3} = 1.35$ (Fig. 84 b)
Ejemplo 216. $e^{.03} = 1.0305$ (Fig. 84 c)
Ejemplo 217. $e^{.003} = 1.003$ (Fig. 84 d)
Ejemplo 218. $e^{4.2} = 66$ (Fig. 84 e)
Ejemplo 219. $e^{.42} = 1.52$ (Fig. 84 f)

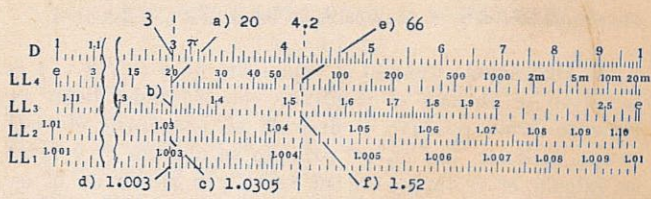


Fig. 84

4ª Operación: Se obtienen las raíces de e (2.718...) utilizando la escala recíproca CI, puesto que:

$$\sqrt[n]{e} = e^{1/n}$$

Ejemplo 220. $\sqrt[1.7]{e}$

a) Con la reglilla en su posición original, se coloca el cursor en 1.7 de la escala CI.

b) El resultado se lee en la escala inmediata inferior $LL_3 = 1.8$. (Fig. 85).

Fig. 85

El mismo valor se calcula teniendo en cuenta primero el recíproco de $1.7 = 0.59$.

Ejemplo 221. $\sqrt[1.7]{e}$

a) Utilizando el recíproco se tiene:

$$\sqrt[1.7]{e} = e^{1/1.7} = e^{.59}$$

b) Se procede como en la 3ª operación, colocando el cursor en D 59, y el resultado se lee en $LL_3 = 1.8$.

5ª Operación: Cuando el exponente de **e** (2.718...) es negativo se obtiene el resultado considerando dicho exponente como positivo y después se encuentra el recíproco, es decir, que en e^{-n} primero se obtiene e^n y luego se calcula el recíproco de su valor por medio de la escala CI.

Ejemplo 222. $e^{-3} = 1/e^3$

Procediendo como en la 3ª operación se tiene que: $e^3 = 20$. (Fig. 84 a).

Solución: $e^{-3} = 1/e^3 = 1/20 = 0.05$

Ejemplo 223. $e^{-0.35} = 1/e^{.35}$

Como $e^{.35} = 1.42$

Solución: $e^{-0.35} = 1/1.42 = 0.704$

6ª Operación: Ecuaciones exponenciales de la forma: $e^x = a$.

Ejemplo 224. $e^x = 90$.

Se coloca el cursor en LL 90, y el resultado se lee en D = 4.5. (Fig. 86 a).

Solución: $e^x = 90$; $x = 4.5$.

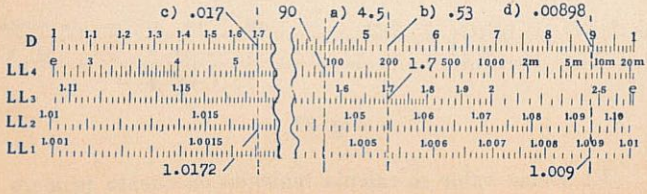


Fig. 86

Ejemplo 225. $e^x = 1.7$; $x = 0.53$ (Fig. 86 b).
Ejemplo 226. $e^x = 1.0172$; $x = 0.017$ (Fig. 86 c).

(Este mismo procedimiento se sigue para obtener los logaritmos naturales, neperianos o hiperbólicos cuya base es el número **e** (2.718...)

7ª Operación.

LOGARITMOS NATURALES O NEPERIANOS
($\log_n$ ó $\log_e$)

Es fácil calcularlos colocando el cursor en las escalas log. log. en el número del cual se desea su logaritmo natural y el resultado se lee en la escala D.

Si el número se halla comprendido entre e (2.718) y 22 000 (aprox.), es decir, en la escala log. log. mayor, el logaritmo lleva una cifra entera.

Si está comprendido entre 1.105 y e (2.718), la primera cifra significativa ocupará el primer lugar después del punto decimal.

Si se encuentra en la siguiente escala, es decir, entre 1.01 y 1.105, la primera cifra ocupará el segundo orden decimal.

Si está en la siguiente escala, entre 1.001 y 1.01, la primera cifra deberá colocarse en el tercer lugar después del punto decimal. Estos valores sólo podrán calcularse en las reglas que contienen 4 escalas log. log. (Regla de cálculo "Velásquez").

Ejemplo 227.	$\log_e 90$	$= 4.5$	(Fig. 86 a)
Ejemplo 228.	$\log_e 1.7$	$= 0.53$	(Fig. 86 b)
Ejemplo 229.	$\log_e 1.0172$	$= 0.017$	(Fig. 86 c)
Ejemplo 230.	$\log_e 1.009$	$= 0.00898$	(Fig. 86 d)

8ª Operación.

ANTILOGARITMOS NATURALES
(antilog$_e$).

Se procede inversamente a la 7ª operación, colocando el cursor en la escala D, y los antilogaritmos se leen en las escalas LL.

Ejemplo 231.	antilog$_e$ 4.5	$= 90$	(Fig. 86 a)
Ejemplo 232.	antilog$_e$ 0.53	$= 1.7$	(Fig. 86 b)
Ejemplo 233.	antilog$_e$ 0.017	$= 1.0172$	(Fig. 86 c)
Ejemplo 234.	antilog$_e$ 0.00898	$= 1.009$	(Fig. 86 d)

9ª Operación. Ecuaciones de la forma $\sqrt[x]{e} = a$

Como el radical puede transformarse a una potencia fraccionaria, se tiene:

$$\sqrt[x]{e} = e^{1/x} = a$$

Se toma el valor de **a** en las escalas LL, por medio del cursor, y el valor de **x** se obtiene en la escala recíproca CI (la reglilla debe estar en su posición original). (Figura 87).

Ejemplo 235. $\sqrt[x]{e} = 1.69$; $x = 1.9$ (Fig. 87 a)

Ejemplo 236. $\sqrt[x]{e} = 1.2$; $x = 5.5$ (Fig. 87 b)

Ejemplo 237. $\sqrt[x]{e} = 1.04$; $x = 25.5$ (Fg. 87 c)

Ejemplo 238. $\sqrt[x]{e} = 1.003$; $x = 334$ (Fig. 87 d)

(Para la colocación del punto decimal deberá tenerse en cuenta la escala log. log. que se utilice).

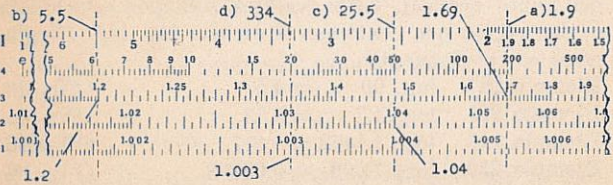


Fig. 87

USO DE LA REGLILLA

En las operaciones anteriores se ha utilizado únicamente el cursor, si se emplea la reglilla podrán efectuarse los siguientes cálculos:

10ª Operación: Elevación de un número a cualquier potencia con exponente entero o fracción decimal.

Ejemplo 239. $3.15^{1.4}$

a) Se hacen coincidir el extremo izquierdo de la escala C (C 1) con el valor 3.15 de la escala log. log.

b) Colocado el cursor en C 1.4, el resultado se lee en la misma escala log. log., debajo de la línea del cursor.

Solución: $3.15^{1.4} = 5$. (Fig. 88 a).

Ejemplo 240. $3.15^{.14}$

a) La posición de la reglilla y la del cursor será la misma, pero el resultado se lee en la escala log. log. inmediata inferior.

Solución: $3.15^{.14} = 1.174$. (Fig. 88 b).

Ejemplo 241. $3.15^{.014} = 1.0162$. (Fig. 88 c).

Ejemplo 242. $3.15^{.0014} = 1.0016$. (Fig. 88 d).

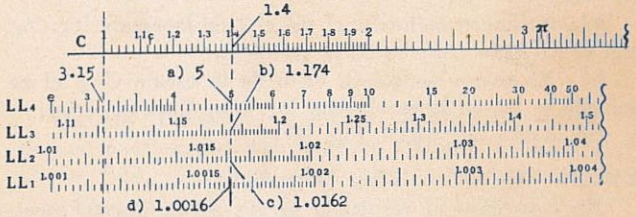


Fig. 88

Ejemplo 243. 1.2^{2}

a) Se hacen coincidir 1.2 de la escala log. log. con el extremo izquierdo de la escala C.

b) Colocado el cursor en 2 de la escala C, se lee el resultado en la misma escala log. log. = 1.44. (Fig. 89 a).

Ejemplo 244. 1.2^{20}

El mismo procedimiento anterior, pero leyendo el resultado en la escala log. log. superior.

Solución: $1.2^{20} = 38$. (Fig. 89 b).

Ejemplo 245. $1.2^{.2} = 1.0371$ (Fig. 89 c)

Ejemplo 246. $1.2^{.02} = 1.00365$ (Fig. 89 d)

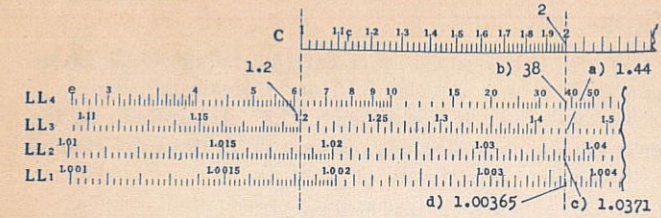


Fig. 89

En los casos en que sea necesario coincidir con el extremo derecho de la reglilla (C 10) y el exponente contenga una cifra entera, el cursor se correrá hacia la izquierda, leyéndose el resultado en la escala log. log. superior. Si el exponente es fracción decimal menor que 1, los valores se obtendrán en las escalas inferiores.

Ejemplo 247. 2^5

a) Se hacen coincidir el valor 2 de la escala log. log. con el extremo derecho de la escala C.

b) El cursor se coloca en 5 de la escala C, y el resultado se lee en la escala log. log. inmediata superior.

Solución: $2^5 = 32$. (Fig. 90 a).

Ejemplo 248. $2^{\cdot 5} = 1.415$. (Fig. 90 b).

En este caso el resultado se lee en la misma escala log. log. en que se encuentra el valor 2, puesto que es necesario deslizar el cursor a la izquierda.

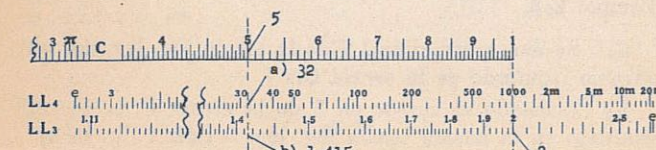


Fig. 90

11ª Operación. Extracción de raíces de cualquier índice

Ejemplo 249. $\sqrt[3.6]{150}$

a) Se hacen coincidir por medio de la línea del cursor los valores LL 150 y C 3.6.

b) Colocado el cursor en el extremo izquierdo de la reglilla se lee el resultado en la misma escala LL = 4.02. (Fig. 91 a).

Ejemplo 250. $\sqrt[36]{150}$

Con la misma posición que en el ejemplo anterior, pero leyendo el resultado en la escala LL inferior.

Solución: $\sqrt[36]{150} = 1.15$. (Fig. 91 b).

(Si se desean obtener las raíces 360 ó 3600, se leen los resultados en las escalas LL inferiores).

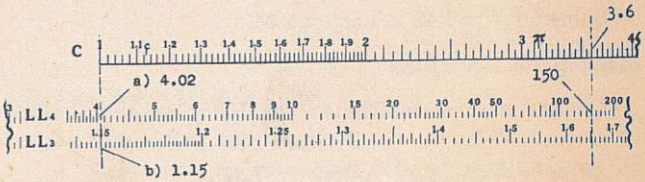


Fig. 91

Cuando la reglilla se desliza hacia la izquierda, será necesario colocar el cursor en el extremo derecho, es decir, en C 10, y en este caso el valor se lee en la escala LL inmediata inferior cuando el índice lleva una cifra entera.

Ejemplo 251. $\sqrt[7]{200}$

a) Coincidir LL 200 con C 7.

b) Se coloca el cursor en C 10 (extremo derecho de la reglilla) y el resultado se lee en la escala LL inferior,

Solución: $\sqrt[7]{200} = 2.13$. (Fig. 92 a).

Ejemplo 252. $\sqrt[70]{200} = 1.0785$. (Fig. 92 b).

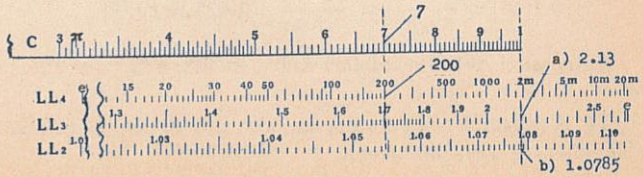


Fig. 92

12ª Operación. Efectuando con anterioridad algunas operaciones puede calcularse con cantidades no contenidas en las escalas Log. Log.

Ejemplo 253. $\sqrt[3]{350\ 000} = \sqrt[3]{350 \times 1000} = 7.05 \times 10$

Solución: $\sqrt[3]{350\ 000} = 70.5.$

Ejemplo 254. $\sqrt{10\ 500} = \sqrt{1.05 \times 10\ 000} = 1.0246 \times 100$

Solución: $\sqrt{10\ 500} = 102.46.$

Ejemplo 255. $\sqrt[15]{350\ 000} = \sqrt[15]{350} \times \sqrt[15]{1000} =$

Solución: $= 1.48 \times 1.585 = 2.34.$

Ejemplo 256. $\sqrt{0.0189}$

En este caso se multiplica por 100 y se divide entre 100:

$$\sqrt{0.0189} = \frac{\sqrt{1.89}}{\sqrt{100}} = \frac{1.375}{10} = 0.1375$$

13ª Operación. Si al elevar a una potencia la reglilla queda fuera de la regla, para señalar valores no incluídos en ésta, se ejecutan las operaciones necesarias para hacer que el valor quede contenido dentro de las escalas de la regla.

Ejemplo 257. $115^5 = (1.15 \times 100)^5$

$$= 2.01 \times 100^5 = 2.01 \times 10^{10}$$

Solución: $115^5 = 20\ 100\ 000\ 000.$

Ejemplo 258. 0.103^{12}

$$0.103^{12} = \frac{1.03^{12}}{10^{12}} = \frac{1.425}{10^{12}} = 1.425 \times 10^{-12}$$

Solución: $0.103^{12} = 0.000\ 000\ 000\ 001\ 425.$

14ª Operación. Combinación de potencias y raíces. (Exponentes fraccionarios).

Ejemplo 259. $25^{3/7} = \sqrt[7]{25^3}$

Se calcula primero la raíz y posteriormente se obtiene la potencia.

a) Se hacen coincidir LL 25 con C 7 por medio de la línea del cursor. (No es necesario leer la raíz).

b) Se desliza el cursor hasta C 3, y el resultado se lee en la misma escala LL = 3.96 debajo de la línea.

Solución: $25^{3/7} = \sqrt[7]{25^3} = 3.96$. (Fig. 93).

Fig. 93

Ejemplo 260. $15^{3/4} = \sqrt[4]{15^3}$

a) Coincidir LL 15 con C 4.

b) Colocando el cursor en C 3, el resultado se lee en la misma escala LL = 7.6.

Solución: $15^{3/4} = \sqrt[4]{15^3} = 7.6$. (Fig 94).

Fig. 94

Ejemplo 261. $1.75^{2/7} = \sqrt[7]{1.75^2}$

Coincidir LL 1.75 con C 7.

b) Colocar el cursor en C 2, y el resultado se lee en la misma escala LL = 1.173. (Fig. 95).

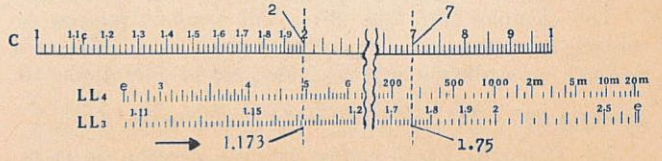


Fig. 95

En algunos casos es necesario obtener primero la potencia y después se calcula la raíz, deslizando la reglilla dos veces.

Ejemplo 262. $8^{3/7} = \sqrt[7]{8^3}$

a) Se obtiene primero la potencia haciendo coincidir el extremo izquierdo de la escala C con LL 8, y se coloca el cursor en C 3. (No es necesario leer el resultado). (Fig. 96).

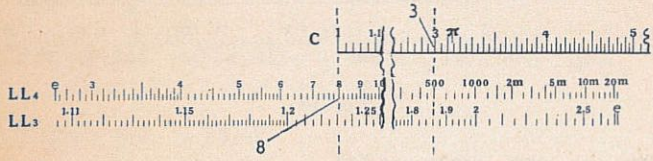


Fig. 96

b) Sin mover el cursor, se desliza la reglilla a la izquierda hasta que el valor 7 de la escala C coincida con la línea del cursor.

c) Colocado el cursor en el extremo derecho de la reglilla se lee en la escala LL inmediata inferior el resultado **2.44.**

Solución: $8^{3/7} = \sqrt[7]{8^3} = 2.44$. (Fig. 97).

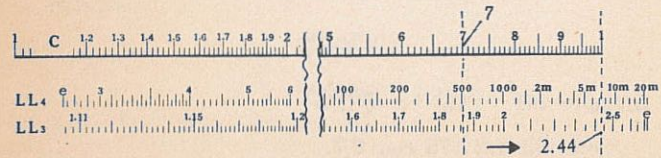


Fig. 97

Los ejemplos 259, 260, 261 y 262 también pueden resolverse transformando primero el exponente a fracción decimal, procediendo después como en la 10^a operación.

Ejemplo 263. $15^{3/4} = \sqrt[4]{15^3} = 15^{.75}$. (Ejemplo 260).

a) Coincidir LL 15 con el extremo derecho de la escala C.

b) Colocado el cursor en C 75, se lee el resultado en la misma escala Log. Log. = 7.6. (Fig. 98).

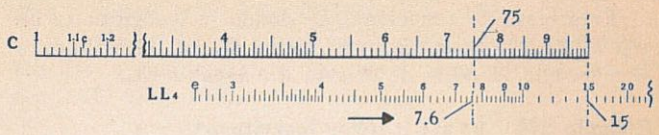


Fig. 98

Ejemplo 264. $8^{3/7} = 8^{.428}$. (Ejemplo 262).

a) Coincidir **LL** 8 con el extremo izquierdo de la escala **C**.

b) Colocado el cursor en **C** 428, se lee el resultado en la escala LL inferior = 2.44. (Se usa esta escala inferior porque el exponente es menor que 1 y el cursor se desliza hacia la izquierda).

Solución: $8^{3/7} = 8^{.428} = 2.44$. (Fig. 99).

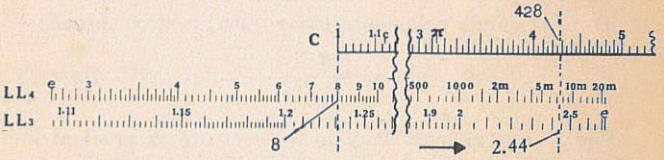


Fig. 99

15ª Operación. Potencias con exponentes negativos.

Primero se considera el exponente como positivo, procediéndose como en los casos tratados anteriormente. Después se busca el recíproco del resultado, obteniéndose así la solución final. Para la colocación del punto decimal aplíquense las reglas dadas en el estudio de la escala recíproca CI.

Ejemplo 265. $5^{-3} = 1/5^3 = 1/125 = 0.008$
Ejemplo 266. $1.6^{-4} = 1/1.6^4 = 1/6.5 = 0.154$
Ejemplo 267. $1.03^{-10} = 1/1.03^{10} = 1/1.345 = 0.743$
Ejemplo 268. $1.4^{-10} = 1/1.4^{10} = 1/29 = 0.0345$
Ejemplo 269. $15^{-0.3} = 1/15^{0.3} = 1/2.25 = 0.444$

16ª Operación. Ecuaciones exponenciales de la forma:

$$a^x = b$$

Esta clase de ecuaciones en donde la incógnita es un exponente se resuelven por medio de los logaritmos o bien usando la regla de cálculo con escalas LL.

Ejemplo 270. $3^x = 6.2$. (Por logaritmos).

a) Teniendo en cuenta que el logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo del número, se tiene:

$$x \log 3 = \log 6.2$$

Despejando a x:

$$x = \frac{\log 6.2}{\log 3} = \frac{0.7924}{0.4771} = 1.66$$

Solución: $3^x = 6.2$; $x = 1.66$.

b) Aplicando solamente logaritmos, se procede así:

$$x = \frac{\log 6.2}{\log 3}$$

Puesto que el logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor, se tiene:

$$\begin{aligned} \log x &= \log \log 6.2 - \log \log 3 \\ &= \log 0.7924 - \log 0.4771 \\ &= \overline{1}.8989 - \overline{1}.6786 \end{aligned}$$

Sumando y restando 10 a los logaritmos para convertir las características negativas en positivas y buscando el antilogaritmo correspondiente, se obtiene el resultado:

$$\begin{aligned} \log x &= \frac{9.8989 - 10}{9.6786 - 10} \\ \text{antilog} \quad & 0.2203 = 1.66 \end{aligned}$$

Empleando las escalas Log. Log. de las reglas de cálculo, se procede como sigue:

Sea la misma ecuación:

Ejemplo 271. $3^x = 6.2$.

a) Se hacen coincidir el extremo izquierdo de la escala C con el valor 3 de la escala Log. Log.

b) Se recorre el cursor hasta que su línea esté sobre 6.2 de la misma escala LL, y el resultado se lee en $C = 1.66$. (Fig. 100).

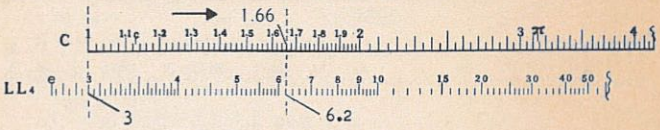


Fig. 100

En general, para obtener el valor de **x** en una ecuación de la forma $a^x = b$, se hace coincidir un extremo de la escala C con el valor de **a** en la escala LL. Se coloca el cursor en el valor de b en la escala LL, y el resutado se lee en la escala **C.**

Ejemplo 272. $1.2^x = 1.265$ (Por logaritmos).

$$x \log 1.2 = \log 1.265; \text{ despejando } x:$$

$$x = \frac{\log 1.265}{\log 1.2} = \frac{0.1021}{0.0792} = 1.29$$

Empleando regla de cálculo:

a) Se hacen coincidir el valor 1.2 de la escala LL con el extremo izquierdo de la escala C.

b) Colocando el cursor en 1.265 de la misma escala LL, el resultado se lee en $C = 1.29$. (Fig. 101).

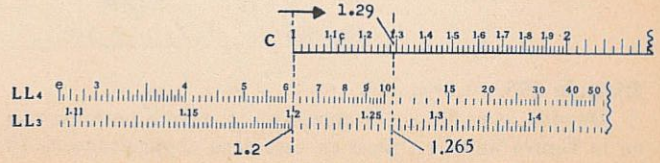


Fig. 101

Ejemplo 273. $4^x = 64$.

a) Coincidir LL 4 con el extremo izquierdo de la reglilla.

b) Colocar el cursor en LL 64, y el resultado se lee en C = 3. (Fig. 102 a).

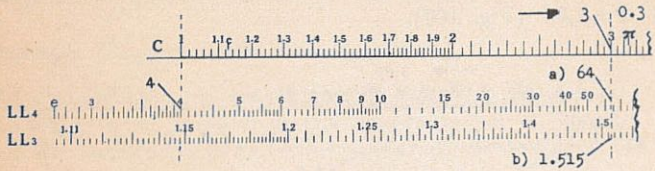


Fig. 102

Si en lugar de 64 se usara el valor 1.515 (que se encuentra en la escala LL inmediata inferior), la reglilla y el cursor quedarán en la misma posición, pero el valor de x es igual a un décimo del anterior, es decir, en la ecuación.

$$4^x = 1.515$$

la incógnita x = 0.3. (Fig. 102 b).

Ejemplo 274. $1.2^x = 1.62$.

a) Coincidir LL 1.2 con C 1.

b) Colocar el cursor en 1.62 y el resultado se lee en C = 2.65.

Solución: $1.2^x = 1.62$; x = 2.65. (Fig. 103 a).

Fig. 103

Ejemplo 275. $1.2^x = 124$.

Quedan la reglilla y el cursor en la misma posición que en la figura anterior, pero en este caso el resultado es 10 veces mayor.

Solución: $1.2^x = 124$; x = 26.5. (Fig. 103 b).

Ejemplo 276. $\sqrt[x]{50} = 3.7$

El procedimiento es el mismo, puesto que, elevando a la potencia x los dos miembros de la ecuación, se tiene: $3.7^x = 50$ **(Por logaritmos).**

$$x = \frac{\log 50}{\log 3.7} = \frac{1.6990}{0.5682} = 2.99$$

Ejemplo 277. $1.2^{5x} = 124$

a) Coincidir LL 1.2 con C 1.

b) Colocar el cursor en LL 124, y el resultado se lee en C = 26.5.

Solución: $1.2^{5x} = 124$; $5x = 26.5$. (Fig. 103 b).

Despejando **x**, se tiene:

$$\therefore\ x = \frac{26.5}{5} = 5.3 \text{ (Solución final).}$$

En algunos casos es necesario usar el extremo derecho de la escala C, es decir, C 10, deslizando la reglilla hacia la izquierda.

Ejemplo 278. $2^x = 90$

a) Se hacen coincidir LL 2 con el extremo derecho de la reglilla, es decir, con C 10.

b) Se coloca el cursor en el valor 90 de la escala LL, y el resultado se lee en la escala C, considerando una cifra entera, puesto que el valor se lee en la escala LL inmediata superior.

Solución: $2^x = 90$; $x = 6.5$. (Fig. 104 a).

Fig. 104

(Si la reglilla se desliza hacia la izquierda como en el caso anterior, el valor de **x** tiene una cifra entera cuando se lee en la escala LL inmediata superior, y será fracción decimal, comenzando después del punto, cuando se lee en la misma escala LL).

Ejemplo 279. $2^x = 1.385$.

(En este caso, como 1.385 es menor que 2, es natural que el valor de **x** debe ser menor que un entero).

a) Se coloca la reglilla en la misma posición que en el caso anterior.

b) Puesto el cursor en el valor 1.385 de la misma escala LL en que se encuentra el valor 2, el resultado se lee en C = 0.47. (Fig. 104 b).

NOTA: Con el estudio y la práctica se podrá saber fácilmente la colocación del punto decimal, ya sea en el caso en que la reglilla se deslice hacia la derecha o bien hacia la izquierda.

La ecuación exopnencial $a^x = b$ presenta algunas dificultades cuando **a** o **b** representan un valor menor que **uno.**

Primer caso: Cuando a es menor que **1** y b tiene un valor mayor que **1.**

Ejemplo 280. $0.84^x = 1.33$. (Por logaritmos).

$x \log 0.84 = \log 1.33$

$$x = \frac{\log 1.33}{\log 0.84} = \frac{0.1239}{\bar{1}.9243}$$

Teniendo en cuenta que en esta división el denominador $\bar{1}.9243$ está compuesto de una parte entera que es negativa (la característica -1) y de una parte decimal que es positiva (la mantisa .9243), es necesario transformar el denominador en un número completamente negativo, como sigue:

$$\bar{1}.9243 = -1 + 0.9243 = -0.0757$$

Sustituyendo:

$$x = \frac{0.1239}{\bar{1}.9243} = \frac{0.1239}{-0.0757} = -1.64$$

Solución: $0.84^x = 1.33$; $x = -1.64$

(En estas ecuaciones el valor de **x** siempre es negativo).

Ejemplo 281. $0.84^x = 1.33$. (Por regla de cálculo).

Teniendo en cuenta que:

$$a^x = (1/a)^{-x}$$

Se tiene:

$$0.84^x = (1/0.84)^{-x} = 1.19^{-x}$$

Substituyendo en la ecuación exponencial, se tiene:

$$1.19^{-x} = 1.33$$

La cual se resuelve como en los ejemplos 270, 271, 272 y 273.

a) Se hacen coincidir el extremo izquierdo de la escala C con el valor 1.19 de la escala LL.

b) Se coloca el cursor en **1.33** de la misma escala LL, y el resultado se lee en C = 1.64 (Fig. 105). En este caso el valor 1.64 es el valor de $-x$.

Solución: $0.84^x = 1.33$, o sea: $1.19^{-x} = 1.33$ en donde

$$-x = 1.64$$

Por consiguiente: $x = -1.64$

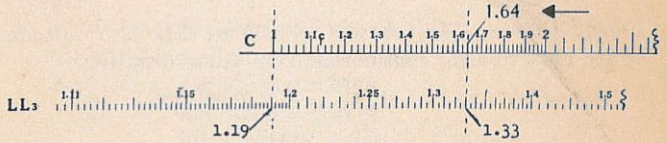


Fig. 105

Segundo caso: Cuando **a** es mayor que 1 y **b** menor que 1.

Ejemplo 282. $1.16^x = 0.74$ (Por logaritmos).

$$x \log 1.16 = \log 0.74$$

$$x = \frac{\log 0.74}{\log 1.15} = \frac{\bar{1}.8692}{.0645}$$

Teniendo en cuenta que en esta división el numerador $\bar{1}.8692$ se compone de una parte entera que es negativa (la característica -1) y de una parte decimal que es positiva (la mantisa .8692), es necesario transformar

el numerador en un número completamente negativo, como sigue:

$$-1 + 0.8692 = -0.1308$$

Substituyendo:

$$x = \frac{-0.1308}{0.0645} = -2.03$$

Solución: $1.16^x = 0.74$; $x = -2.03$ (El valor de **x** siempre es negativo).

Ejemplo 283. $1.16^x = 0.74$. (Por regla de cálculo).

a) Usando el recíproco de la fracción, se tiene:

$$0.74 = 1/1.35$$

b) Substituyendo en la ecuación:

$$1.16^x = 1/1.35$$

c) Coincidir el extremo izquierdo de la escala C con el valor **1.16** de la escala LL (estas escalas LL cambian sólo de sub-índice en las reglas de cálculo, según el número de escalas log. log. que contengan, pero el valor de sus divisiones es el mismo).

d) Colocando el cursor en 1.35 de LL, el resultado se lee en C = 2.03, considerando un valor negativo.

Solución: $1.16^x = 0.74$; $x = -2.03$. (Fig. 106).

Fig. 106

LOGARITMOS DE SISTEMA DE CUALQUIER BASE

Por medio de las escalas Log. Log. de las reglas de cálculo es posible obtener fácilmente el logaritmo de un número en un sistema de cualquier base, para lo cual se establece una ecuación exponencial en la que el logaritmo es el valor de la incógnita **x**.

17ª **Operación.** Logaritmos de base 10 de números comprendidos entre 1001 y 2000, con aproximación de 4 y 5 decimales.

Con ayuda de las escalas LL se puede elevar el número 10 a cualquier potencia y obtener rápida y fácilmente el resultado.

Como el logaritmo de base **10** de un número es el exponente a que debe elevarse 10 para obtener dicho número, para establecer la tabla de logaritmos de base **10** basta coincidir un extremo de la reglilla con el valor 10 de la escala **LL**, y colocando el cursor en la escala LL en el número cuyo logaritmo se busca, el logaritmo respectivo se encuentra en la escala C. Es lo mismo que resolver una ecuación exponencial de la forma:

$$10^x = b$$

Ejemplo 284. log 1.042 (o múltiplos y submúltiplos).

La ecuación exponencial es:

$$10^x = 1.042$$

a) Coincidir LL 10 con el extremo izquierdo de la escala C.

b) Colocado el cursor en **LL 1.042**, se encuentra la mantisa del logaritmo en **C = .0178.** (Fig. 107 a).

Solución: log 1.042 = 0.0178
log 104.2 = 2.0178
log 0.001042 = 7.0178 − 10 etc.

Conviene recordar que la mantisa, la parte decimal, es siempre la misma, variando sólo la característica.

(Cuando la reglilla se desliza hacia la derecha, la mantisa tendrá el mismo número de ceros decimales que tenga la cantidad cuyo logaritmo se busca).

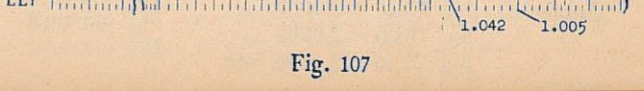


Fig. 107

Ejemplo 285. log 1.005 (múltiplos y submúltiplos).

(Este ejemplo sólo se resuelve con reglas de cálculo que contengan 4 escalas LL, como la Regla de Cálculo Velásquez de 24 escalas).

Se procede igual que en el caso anterior, pero intercalando dos ceros decimales.

Solución: log 1.005 = 0.00216 (Fig. 107 b).
log 10.05 = 1.00216
log 100.5 = 2.00216 etc.

Ejemplo 286. log 1.75.

Con la misma posición de la reglilla en los casos anteriores, se coloca el cursor en LL 1.75, y la mantisa se lee en C = 243. (Dib. 107 c).

Solución: log 1.75 = 0.243
log 175 = 2.243
log 0.0175 = 8.243 − 10 etc.

En algunos casos es necesario deslizar la reglilla hacia la izquierda.

Ejemplo 287. log 1.015.

a) Se hace coincidir el extremo derecho de la reglilla, es decir, C 10 con el valor 10 de la escala LL.

b) Se coloca el cursor en LL 1.015 y el logaritmo se lee en C = 0.0065. (Fig. 108 a).

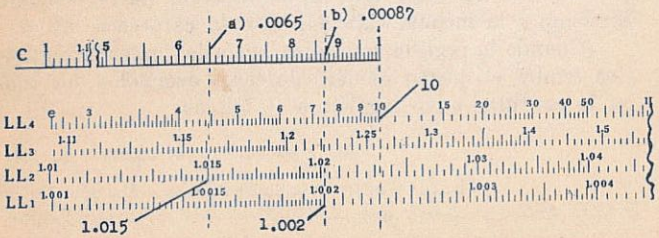


Fig. 108

Solución: log 1.015 = 0.0065
log 101.5 = 2.0065 .
log 10.15 = 1.0065 etc.

(Cuando la reglilla se desliza hacia la izquierda, como en el ejemplo anterior, el logaritmo lleva un cero decimal más que los que contenga el número).

Ejemplo 288. log 1.002

Con la reglilla en la misma posición anterior, se coloca el cursor en LL 1.002 y el logaritmo se lee en C = **0.00087.** (Fig. 108 b).

Solución: log 1.002 = 0.00087
log 100.2 = 2.00087
log 10.02 = 1.00087 etc.

USO DE LAS ESCALAS LL_0 Y LL_{00} (Inversas)

Las reglas de cálculo que contienen estas escalas, son la polifásica Keuffel & Esser, la Post-Trig de la Frederick Post y la "Regla de Cálculo Velásquez" de 24 escalas.

1ª Operación: Valores de potencias del número e (2.718...) con exponente negativo, desde −0.001 hasta −10.

Para valores comprendidos entre $e^{-0.001} = 0.999$ y $e^{-0.01} = 0.99$, se coloca el cursor en la escala A_1 (mitad izquierda), y los resultados se leen en LL_0.

Ejemplo 289. $e^{-0.0024} = 0.9976$. (Fig. 109 a).
Ejemplo 209. $e^{-0.0046} = 0.9954$ (Fig. 109 b).
Ejemplo 291. $e^{-0.0094} = 0.9906$ (Fig. 109 c).

Fig. 109

Los valores comprendidos entre $e^{-0.001} = 0.99$ y $e^{-0.1} = 0.905$, se obtienen utilizando la segunda mitad de la escala **A** y la escala LL_0.

Ejemplo 292. $e^{-0.011} = 0.989$ (Fig. 110 a)
Ejemplo 293. $e^{-0.0275} = 0.973$ (Fig. 110 b)
Ejemplo 294. $e^{-0.094} = 0.91$ (Fig. 110 c)

Fig. 110

Los valores entre $e^{-0.1} = 0.905$ y $e^{-1} = 0.368$ se obtienen con las escalas A_1 y LL_{00}.

Ejemplo 295. $e^{-0.225} = 0.8$ (Fig. 111 a).
Ejemplo 296. $e^{-0.37} = 0.69$ (Fig. 111 b).
Ejemplo 297. $e^{-0.92} = 0.4$ (Fig. 111 c).

Fig. 111

Los valores comprendidos entre $e^{-1} = 0.368$ y $e^{-10} = 0.00005$ se obtienen utilizando las escalas A_2 (mitad derecha de la escala A) y LL_{00}.

Ejemplo 298. $e^{-2.05} = 0.13$ (Fig. 112 a)
Ejemplo 299. $e^{-3} = 0.05$ (Fig. 112 b)
Ejemplo 300. $e^{-6.2} = 0.002$ (Fig. 112 c)

Fig. 112

2ª **Operación:** Procediendo en sentido opuesto pueden encontrarse los logaritmos naturales o hiperbólicos (de base e) de los números comprendidos entre 0.00005 y 0.999.

Colocando el cursor en valores de LL_0 o de LL_{00}, se leen sus logaritmos naturales en la escala A, considerándolos con signo negativo.

Si los números están comprendidos en la mitad izquierda de la escala LL_0, se anteponen dos ceros decimales a la primera cifra significativa.

Ejemplo 301. $\log_e 0.9984 = -0.0016$ (Fig. 113a)
Ejemplo 302. $\log_e 0.995 = -0.005$ (Fig. 113 b)
Ejemplo 303. $\log_e 0.992 = -0.008$ (Fig. 113 c)

Fig. 113

Si se encuentran dentro de la mitad derecha de la escala LL_0, se antepone un cero decimal.

Ejemplo 304. $\log_e 0.977 = 0.0235$ (Fig. 114 a)
Ejemplo 305. $\log_e 0.96 = 0.041$ (Fig. 114 b)
Ejemplo 306. $\log_e 0.94 = 0.062$ (Fig. 114 c)

Fig. 114

Cuando los números están comprendidos en la mitad izquierda de la escala LL_{00}, la primera cifra significativa ocupará el primer lugar después del punto decimal.

Ejemplo 307. $\log_e 0.75 = -0.29$ (Fig. 115 a)
Ejemplo 308. $\log_e 0.67 = -0.4$ (Fig. 115 b)
Ejemplo 309. $\log_e 0.565 = -0.57$ (Fig. 115 c)

Fig. 115

Por último, si los valores pertenecen a la segunda mitad de la escala LL_{00}, el punto decimal se colocará después de la primera cifra significativa.

Ejemplo 310. $\log_e 0.08 = -2.55$ (Fig. 116 a)

Ejemplo 311. $\log_e 0.015 = -4.2$ (Fig. 116 b)

Ejemplo 312. $\log_e 0.003 = -5.8$ (Fig. 116 c)

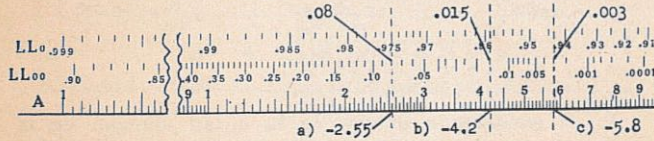


Fig. 116

La regla de cálculo de 24 escalas "Velásquez" indica la situación del punto decimal en cada caso.

3ª Operación: Ecuaciones eponenciales de la forma:

$$e^x = a$$

cuando a es menor que 1.

Ejemplo 313. $e^x = 0.9976$

a) Se coloca el cursor en 0.9976 de la escala LL_0.

b) El valor de **x** se encuentra en $A = -0.0024$. (Fig. 96 a).

Ejemplo 314. $e^x = 0.9954$; $x = -0.0046$ (Fig. 109 b)

Ejemplo 315. $e^x = 0.9906$; $x = -0.0094$ (Fig. 109 c)

(En estos casos el exponente **x** es negativo y lleva dos ceros decimales, como en los ejemplos 289, 290, 291).

Ejemplo 316. $e^x = 0.989$; $x = -0.011$ (Fig. 110 a)

(En este caso, como en el ejemplo 270, se utiliza la mitad derecha de la escala LL_0, y el valor de x lleva un cero decimal).

Ejemplo 317. $e^x = 0.973$; $x = -0.0275$ (Fig. 110 b)
Ejemplo 318. $e^x = 0.91$; $x = -0.094$ (Fig. 110 c)
Ejemplo 319. $e^x = 0.8$; $x = -0.225$ (Fig. 111 a)
Ejemplo 320. $e^x = 0.69$; $x = -0.37$ (Fig. 111 b)
Ejemplo 321. $e^x = 0.4$; $x = -0.92$ (Fig. 111 c)

Al igual que en los ejemplos 295, 296 y 297 se utilizan las escalas A y LL_{00} en su mitad izquierda. (**x** no tiene cero decimal).

Por último, en los ejemplos que siguen se utilizan las escalas A y LL_{00} en su mitad derecha.

La incógnita **x** lleva una cifra entera. (Ejemplos 298, 299 y 300).

Ejemplo 322. $e^x = 0.13$; $x = -2.05$ (Fig. 112 a)
Ejemplo 323. $e^x = 0.05$; $x = -3$ (Fig. 112 b)
Ejemplo 324. $e^x = 0.002$; $x = -6.2$ (Fig. 112 c)

4ª Operación: Potencia 100 y raíz 100 de números menores que 1.

Colocando el cursor en cualquier valor de la escala LL_0, se encuentra en la escala LL_{00} la potencia 100 de los números comprendidos entre 0.999 y 0.905.

Ejemplo 325. $0.996^{100} = 0.67$ (Fig. 117 a)
Ejemplo 326. $0.985^{100} = 0.22$ (Fig. 117 b)
Ejemplo 327. $0.979^{100} = 0.12$ (Fig. 117 c)

Inversamente, si el cursor se coloca en LL_{00} se encontrará en LL_0 la raíz de los números comprendidos entre 0.9 y 0.00005.

Ejemplo 328. $\sqrt[100]{0.52} = 0.9935$ (Fig. 117 d)

Ejemplo 329. $\sqrt[100]{0.33} = 0.989$ (Fig. 117 e)

Ejemplo 330. $\sqrt[100]{0.01} = 0.955$ (Fig. 117 f)

Fig. 117

5ª Operación: Potencias de los números fraccionarios menores que 1.

Se sigue el mismo procedimiento para obtener las potencias de números mayores que 1, en el que se utilizaron las escalas LL_1, LL_2, LL_3 y LL_4, en combinación con la escala **C**.

En el caso que nos ocupa se usan las escalas LL_0 y LL_{00} combinadas con la escala **B** (Reglas de Keuffel & Esser, Post-Trig., Darmstad y Velásquez).

Ejemplo 331. 0.88^2

a) Coincidir LL_{00} .88 con el extremo izquierdo de la reglilla.

b) Colocado el cursor en 2 de la mitad izquierda de la escala **B**, es decir, B_1, el resultado se lee en $LL_{00} = 0.775$. (Fig. 118 a).

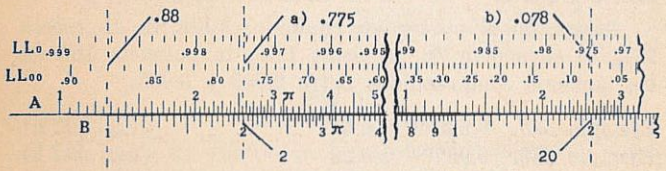


Fig. 118

Si se quiere obtener la 20ª potencia de 0.88, debe quedar la reglilla en la misma posición anterior, colocando el cursor en 2 de la mitad derecha de la escala **B**, es decir (B_2), y el resultado se lee en LL_{00}.

Ejemplo 332. $0.88^{20} = 0.078$ (Fig. 118 b)

De la misma manera se obtiene cualquier potencia de 0.88 o de cualquier otro número.

Ejemplo 333. $0.88^4 = 0.6$

Ejemplo 334. $0.88^7 = 0.41$

Ejemplo 335. $0.997^{2.7} = 0.992$ (Fig. 119 a)

Ejemplo 336. $0.997^4 = 0.9881$ (Fig. 119 b)

Fig. 119

En los casos en que la reglilla se sitúe muy a la derecha y el exponente quede fuera de la regla, entonces debe coincidir el extremo derecho de la escala **B** y el cursor se recorre hacia la izquierda.

Ejemplo 337. $0.93^2 = 0.865$. (Fig. 120).

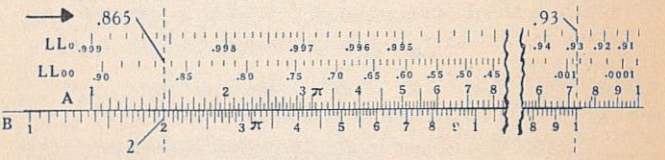


Fig. 120

6ª Operación: Potencias fraccionarias de números fraccionarios.

Se utiliza el extremo derecho de la escala B, y deslizando el cursor hacia la izquierda (en una misma escala), se obtiene el resultado.

Ejemplo 338. $0.2^{.2}$

a) Coincidir LL_{00} **0.2** con el extremo derecho de la escala B. (Puede también considerarse el punto medio).

b) Se coloca el cursor en el valor 2 (izquierdo) de **B**, y el resultado se lee en LL_{00} **0.723.** (Fig. 121 a).

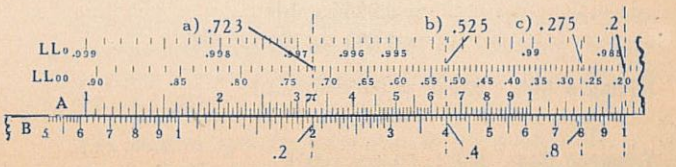


Fig. 121

Ejemplo 339. $0.2^{\cdot 4} = 0.525$ (Fig. 121 b)

Ejemplo 340. $0.2^{\cdot 8} = 0.275$ (Fig. 121 c)

Si se desea calcular el valor $0.2^{\cdot 02}$, se coloca el cursor en el 2 de la derecha y se lee el resultado en $LL_0 = 0.968$.

7ª Operación. Raíces de números fraccionarios menores que 1.

Ejemplo 341. $\sqrt[3]{0.97}$

a) Se hacen coincidir, con ayuda del cursor, LL_0 .97 y B 3.

b) Colocado el cursor en el extremo izquierdo de **B**, se lee el resultado en $LL_0 = 0.99$. (Fig. 122).

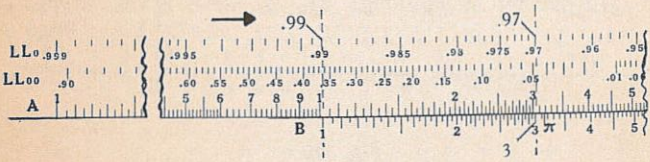


Fig. 122

8ª Operación. Potencias de números no incluídos en las escalas LL_0 y LL_{00}.

a) Se corre el punto decimal hacia la izquierda los lugares necesarios para convertir el número a una fracción decimal.

b) Según el caso, se tomarán las cifras enteras que corresponda, teniendo en cuenta el exponente.

Ejemplo 342. $9.95^3 = (0.995 \times 10)^3$
$= 0.995^3 \times 10^3$
$= 0.985 \times 1000 = 985$

Ejemplo 343. $9.986^3 = 0.9986^3 \times 10^3$
$= 0.9958 \times 1000 = 995.8$

Ejemplo 344. $80^2 = (0.8 \times 100)^2$
$= 0.64 \times 10000 = 6400$

9ª Operación: Raíces de números no incluídos en las escalas LL_0 y LL_{00}.

Ejemplo 345. $\sqrt[3]{985} = \sqrt[3]{0.985 \times 1000}$
$= \sqrt[3]{0.985} \times \sqrt[3]{1000}$
$= 0.9949 \times 10 = 9.949$

Ejemplo 346. $\sqrt{98.5} = \sqrt{0.985 \times 100}$
$= 0.9925 \times 10 = 9.925$

Ejemplo 347. $\sqrt{9710} = \sqrt{0.971 \times 10000}$
$= 0.9854 \times 100 = 98.54$

10ª Operación: LOGARITMOS COMUNES O VULGARES (DE BASE 10) DE NUMEROS COMPRENDIDOS ENTRE 9 Y 9977. (Aproximación hasta 5 cifras decimales). Procedimiento especial. Propiedad del autor.

Utilizando las escalas D y L, que son comunes a casi todas las reglas de cálculo, es muy difícil obtener las aproximaciones necesarias de las mantisas de los logaritmos de números comprendidos entre estos valores, en virtud de que las subdivisiones entre 9 y 10 de la escala D son muy pequeñas. En estos casos es conveniente hacer uso de la escala LL_0, que combinada con la escala B sirve para calcular las mantisas hasta con 4 y 5 decimales. (Para números comprendidos entre 1001 y 2000 véase la 17ª operación, página 99).

En la conversión de logaritmos comunes a logaritmos naturales o hiperbólicos se aplicó el recíproco del logaritmo común del número **e** (2.718)...

$$\log e = 0.434258$$

y el recíproco de 0.434258 es 2.303 (aprox.).

Este mismo número 2.303 puede utilizarse para obtener las mantisas de los logaritmos de números comprendidos entre 9 y 9977. Para ello basta extraer la raíz 2.303 (o 2.3) del número.

Las escalas que se usan son la recíproca LL_0 y la escala B, siendo este procedimiento factible en virtud de que la escala LL_0 es recíproca y para su formación se

tuvo en cuenta el recíproco de la base de los logaritmos neperianos. Por cuanto a la escala B, se tuvo la base de los logaritmos comunes, de base 10.

Ejemplo 348. $\sqrt[2.3]{0.9915} = 0.9963$. (Fig. 123).

Solución: mantisa del log $0.9915 = 0.9963$

$\therefore$ log $99.15 = 1.9963$

log $991.5 = 2.9963$, etc.

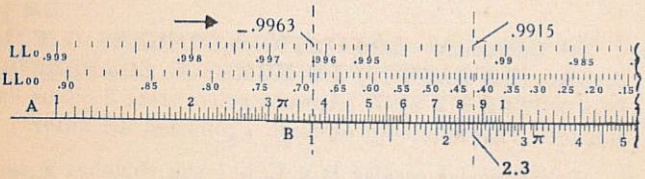


Fig. 123

Ejemplo 349. $\sqrt[2.3]{0.995} = 0.99782$. (Fig. 124).

Solución: mantisa $0.995 = 0.99782$

$\therefore$ log $99.5 = 1.99782$

log $995 = 2.99782$, etc.

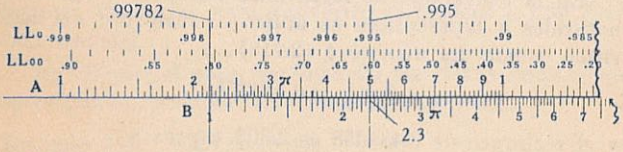


Fig. 124

Ejemplo 350. $\sqrt[2.3]{0.975} = 0.9890$. (Fig. 125).

Solución: log $975 = 2.9890$

log $97.5 = 1.9890$, etc.

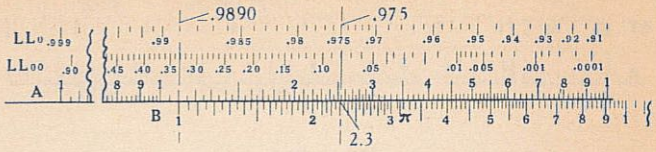


Fig. 125

Para obtener los antilogaritmos se procede inversamente, es decir, se calcula la potencia **2.3** de la mantisa.

Ejemplo 351. Antilog. 2.997.

Se obtiene: $0.997^{2.3} = 0.9931$

Solución: Antilog $2.997 = \mathbf{993.1}$

Ejemplo 352. Antilog 3.9925

Se obtiene: $0.9925^{2.3} = 0.9830$

Solución: Antilog $3.9925 = \mathbf{9830}$

11ª Operación: VALORES NATURALES DE COSENO X, CUANDO X ES DE VALOR PEQUENO (PROXIMO A 0°), Y VALORES NATURALES DE SENO X, CUANDO X ES DE VALOR GRANDE (PROXIMO A 90°). Procedimiento especial. Propiedad del autor. (Prohibida la reproducción).

Se utilizan las reglas de cálculo que contienen la escala ST (trigonométrica) y la escala **A**.

Se tiene en Trigonometría la fórmula:

$\text{sen}^2\ x + \cos^2 x = 1$, o bien, despejando **cos x**, se tiene:

$$\cos x = \sqrt{1 - \text{sen}^2\ x}$$

que puede utilizarse para obtener estos valores.

Ejemplo 353. cos 2° 10′ ó sen 87° 50′

a) Substituyendo valores en la fórmula:

$$\cos x = \sqrt{1 - \text{sen}^2\ x};\ \text{se tiene:}$$

$$\cos 2°\ 10' = \sqrt{1 - \text{sen}^2\ 2°\ 10'}$$

b) Se obtiene el valor de $\text{sen}^2\ 2°\ 10'$ colocando el cursor en ST 2° 10′, y el valor de $\text{sen}^2\ 2°\ 10'$ se lee en la escala $A = 0.00142$. (Fig. 126 a).

Fig. 126

c) Se substituye este valor y se obtiene:

$$\cos 2^\circ\ 10' = \sqrt{1 - 0.00142} = \sqrt{0.99858} = \mathbf{0.9993}$$

Teniendo en cuenta que $\cos A = \text{sen}\ (90^\circ - A)$, se tiene:

$$\cos 2^\circ\ 10' = \text{sen}\ (90^\circ - 2^\circ\ 10') = \text{sen}\ 87^\circ\ 50'$$

$$\therefore\ \text{sen}\ 87^\circ\ 50' = 0.9993$$

De lo cual se deduce que puede seguirse el mismo procedimiento para obtener los valores naturales del seno de ángulos próximos a 90°.

Ejemplo 354. cos 3° 15′ ó sen 86° 45′

a) Colóquese el cursor en ST 3° 15′ y en la escala A se lee 0.0032, que es el valor de $\text{sen}^2\ 3^\circ\ 15'$. (Fig. 126 b)

b) Substituyendo en la fórmula, se tiene:

$$\cos 3^\circ\ 15' = \sqrt{1 - \text{sen}^2\ 3^\circ\ 15'} = \sqrt{1 - 0.0032}$$
$$= \sqrt{0.9968} = \mathbf{0.9984}$$

Para saber la colocación del punto decimal en los cuadrados de las funciones, debe tenerse en cuenta que el valor natural que se obtiene por medio de la escala D (o por medio de la tabla de valores naturales) es:

$$\text{sen}\ 2^\circ\ 10' = 0.0378, \text{ y el cuadrado será:}$$
$$\text{sen}^2\ 2^\circ\ 10' = (0.0378)^2 = 0.00142 \text{ (aprox.)}$$

y lo mismo se obtiene con:

$$\text{sen}^2\ 3^\circ\ 15' = (0.0067)^2 = 0.0032 \text{ (aprox.)}$$

12ª **Operación: Procedimiento especial.** Propiedad del autor. (Prohibida la reproducción).

Si se tiene la oportunidad de usar una regla de cálculo que contenga escalas Log. Log., como la de escritorio de la casa Keuffel, la PostTrig. o bien la de bolsillo de 24

escalas "Velásquez", los valores anteriores pueden obtenerse con mayor rapidez y facilidad usando la escala ST en combinación con las escalas B y LL_0, agregando **siempre** al resultado un "**9 decimal**".

Este método se basa en los teoremas de Taylor y Maclaurin:

$$\cos x = 1 - \frac{\text{sen}^2 x}{2} + \ldots\ldots$$

que se aplicó en los ejemplos números 170 a 183.

Ejemplo 355. cos 2° 10′ ó sen 87° 50′

a) Se hacen coincidir, con ayuda del cursor, el valor 2° 10′ de la escala ST con el valor 2 de la escala B.

b) Colocado el cursor en B 1 se lee en $LL_0 = .9929$ (Fig. 127).

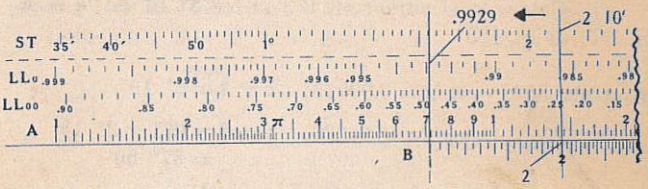


Fig. 127

c) Agregando un "9 decimal", se obtiene
Solución: cos 2° 10′ = 0.99929 = sen 87° 50′

Ejemplo 356. cos 3° 15′ ó sen 86°45′

a) Se hacen coincidir ST 3° 15′ con B 2.

b) Colocado el cursor en B 1 se lee en $LL_0 = .984$. (Fig. 128).

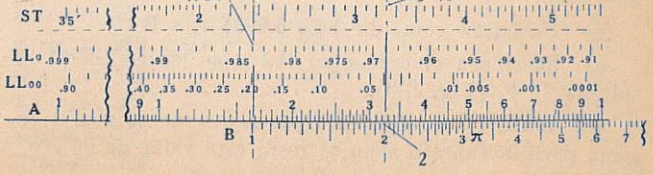


Fig. 128

c) Agregando un "9 decimal", se obtiene:

Solución: $\cos 3° 15' = 0.9984 = \text{sen } 86° 45'$

(En casi todos estos casos puede aproximarse hasta 5 cifras decimales).

13ª Operación. Siguiendo un procedimiento inverso al anterior, se obtiene el ángulo correspondiente a una función dada.

Ejemplo 357. $\cos x = 0.9984$; $x = ? = 3° 15'$

a) Se resta un "9 decimal" al número 0.9984, y queda .984.

b) Se hacen coincidir el valor LL_0 .984 con el valor 1 de la escala B.

c) Colocado el cursor en B 2 se lee 3° 15' en la escala ST. (Fig. 128).

Ejemplo 358. $\cos x = 0.99929$; $x = ? = 2° 10'$

$\text{sen } x = 0\,99929$; $x = ? = 90° - 2° 10' = 87° 50'$

a) Suprimiendo en 0.99929 un "9 decimal", se tiene 0.9929.

b) Se hacen coincidir, con ayuda del cursor, los valores LL_0 .9929 con B 1.

c) Se coloca el cursor en B 2 y se lee en ST el resultado 2° 10'. (Fig. 127).

Ejemplo 359. $\text{sen } x = 0.99935$; $x = ? = 87° 56'$

a) Suprimiendo en 0.99935 un "9 decimal" se tiene 0.9935.

b) Se hacen coincidir LL_0 0.9935 con B 1.

c) Se coloca el cursor en B 2 y se lee en ST el resultado 2° 4'. (Fig. 129).

d) Como 2° 4' es el valor de x cuando se usa el coseno, para la función seno se resta este valor de 90°.

Solución: $x = 90° - 2° 4' = 87° 56'$

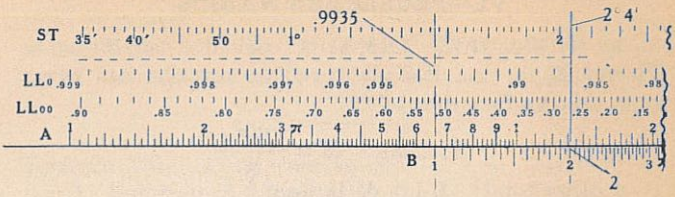


Fig. 129

Ejemplo 360. Sen $x = 0.99985$; $x = ? = 89°$

a) Se suprime un "9 decimal" en 0.99985 y se tiene 0.9985.

b) Se hacen coincidir LL_0 .9985 con B 1.

c) Colóquese el cursor en B 2 y se lee en ST el valor $= 1°$. (Fig. 130).

Solución: $x = 90° - 1° = 89°$

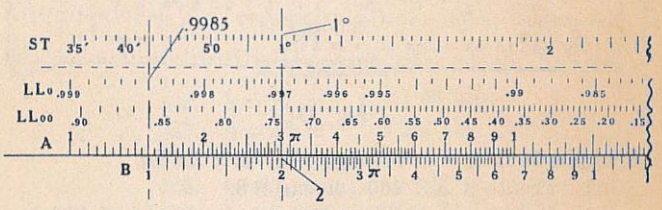


Fig. 130

SECANTE NATURAL

Los valores de la **secante** pueden obtenerse siguiendo el mismo procedimiento de los ejemplos 169 a 183, sumando 1 al valor encontrado en la escala A:

$$\sec x = 1 + .0001525\ x^2$$

Ejemplo 361.	$\sec 5° = 1.0038$	(Fig. 67 a)
Ejemplo 362.	$\sec 2° = 1.00061$	(Fig. 67 b)
Ejemplo 363.	$\sec 4° = 1.00244$	(Fig. 67 c)
Ejemplo 364.	$\sec 3°\ 48'\ (3.8°) = 1.0022$	(Fig. 69 a)
Ejemplo 365.	$\sec 4°\ 39'\ (4.65°) = 1.0033$	(Fig. 69 b)
Ejemplo 366.	$\sec 5°\ 30'\ (5.5°) = 1.0046$	(Fig. 69 c)
Ejemplo 367.	$\sec 7°\ 15'\ (7.25°) = 1.008$	(Fig. 69 d)

VI.—PROBLEMAS VARIOS

1) HORMIGON ARMADO. Cálculo del **Momento Flector M** de una losa de hormigón armado, con carga repartida uniformemente.

$$\text{Fórmula: } M = \frac{cL^2}{8}$$

c carga total; **L** luz de la losa.

Ejemplo 368. $c = 520$ kg/m^2; $L = 3.6$ m.

$$M = \frac{520 \times 3.6^2}{8} = ? = 840 \text{ kg.}$$

a) Frente a A 520 colocar B 8.

b) Cursor en C 3.6; respuesta en A = 840 kg. (Figura 131).

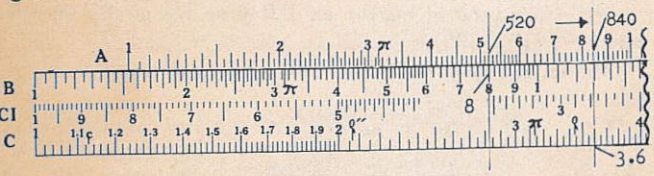


Fig. 131

Ejemplo 369. $c = 3\,400$ kg./m^2; $L = 3.5$ m.

a) Frente a A 3 400 colocar B 8.

b) Cursor en C 3.5; respuesta: en A = 5 200 kg (Fig. 132).

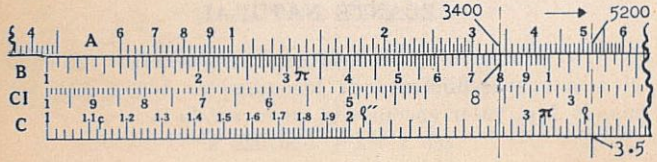


Fig. 132

EJERCICIOS

	c	L	M		c	L	M
416.	720	3.2	920	419.	4 100	3	4 600
417.	560	3.4	810	420.	1 400	5.4	5 100
418.	840	3.1	1 000	421.	1 900	3.4	2 750

(El denominador 8 de la fórmula puede variar según

las condiciones de carga, pero el procedimiento del cálculo es el mismo).

2) **Caída libre de los cuerpos.** Obtención de la altura h o del tiempo t. (Constante 9.8).

$$h = \frac{9.8t^2}{2}$$

Ejemplo 370. (Formación de una tabla de valores).

a) Coincidir A 9.8 con B 2.

b) En la escala A se leen los espacios h recorridos en metros y los tiempos t en segundos se leen en la escala C. (Fig. 133).

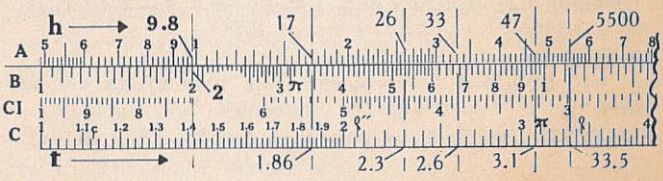


Fig. 133

EJERCICIOS

422. h = 17 m; t = 1.86 seg.
423. h = 26 m; t = 2.3 seg.
424. t = 2.6 seg; h = 33 m.
425. t = 3.1 seg; h = 47 m.
426. h = 5 500 m; t = 33.5 seg.

3) **Velocidad en caída libre de los cuerpos.**

Fórmula: $V = \sqrt{2 \times 9.8 \times h} = \sqrt{19.6}\ h$ m/seg.

Ejemplo 271. (Formación de una tabla de valores).

a) Coincidir B 1 con A 19.6.

b) En B se leen las alturas en metros y en D las velocidades correspondientes en segundos. (Fig. 134).

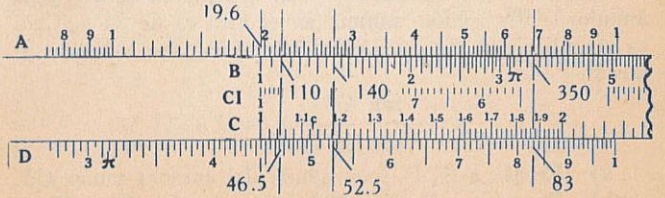


Fig. 134

EJERCICIOS

427. h = 110 m; V = 46.5 m/seg.
428. V = 52.5 m/seg.; h = 140 m.
429. h = 350 m; V = 83 m/seg.

4) **Iluminación.** La iluminación es igual al número de bujías entre el cuadrado de la distancia.

$$\text{Fórmula: } I = \frac{N}{d^2} \text{ bujías metro.}$$

Ejemplo 372. Cálculo de: $I = \frac{16}{2.7^2} = ? = 2.2$ bujías metro.

a) Frente a A 16 colocar C 2.7 (con ayuda del cursor).

b) B 1 señala la respuesta en A = 2.2. (Fig. 135).

Fig. 135

5) **Indice de Refracción. (Ley de Snell o de Descartes).**

Fórmula: $n = \frac{\text{sen } i}{\text{sen } r}$; **n** indice de refracción; **i** ángulo de incidencia; **r** ángulo de refracción.

Ejemplo 373. El ángulo de un prisma es de 47° y su ángulo de desviación mínima en el aire es de 24°. ¿Cuál es el índice (n) de refracción del prisma con respecto al aire?

$$n = \frac{\text{sen } 47°}{\text{sen } 24°} = ? = 1.8$$

a) Frente a S 24° (con ayuda del cursor) poner C 1.

b) Cursor en S 47°; Respuesta en C = 1.8. (Figura 136).

Fig. 136

6) **Cálculo rápido de la LEY DE OHM.** (Formación de Tablas).

Con las cuatro escalas fundamentales A, B, C y D, pueden formarse tablas de valores en las que se relacionen: resistencia (**R** ohms); intensidad de fuerza eléctrica (**E**, volts); intensidad de la corriente producida (**I**, amperes); potencia de la corriente eléctrica (**W**, watts).

Ejemplo 374. Conocidas la resistencia **R** y cualquiera otra cantidad con que está relacionada, se obtiene el otro valor, formándose tablas.

Para una resistencia de 115 ohms, por ejemplo, se obtendrán pares de valores en las escalas ya mencionadas.

a) Frente a A 115 colocar B 1. (Fig. 137).

b) Se forman tablas de valores en que conocido uno de ellos se obtiene el otro.

$$1^{o}\quad R\ (115) = \frac{E(195)\ \text{(escala A)}}{I(1.7)\ \text{(escala B)}}$$

$$R\ (115) = \frac{E(12)\ \text{(escala A)}}{I(0.104)\ \text{(escala B)}}$$

(Los amperes con relación a los volts tienen el punto decimal dos lugares a la izquierda). Ejemplo: E(195); I(1.7). (Fig. 137).

$$2^{o}\quad R\ (115) = \frac{E^2(198)\ \text{(escala D)}}{W\ (340)\ \text{(escala B)}}$$

$$R\ (115) = \frac{E^2(41.5)\ \text{(escala D)}}{W\ (15)\ \text{(escala B)}}$$

$$3^{o}\quad R\ (115) = \frac{W\ (7.2)\ \text{(escala A)}}{I^2\ (0.25)\ \text{(escala C)}}$$

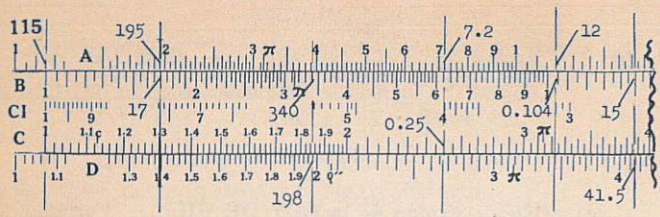


Fig. 137

Si se busca la resistencia R conocidos los otros dos elementos, entonces se relaciona el par de cantidades dadas, encontrándose en la escala **A**, señalado por el extremo de la escala **B**, el valor de la resistencia **R**, como puede verse en la misma figura 137.

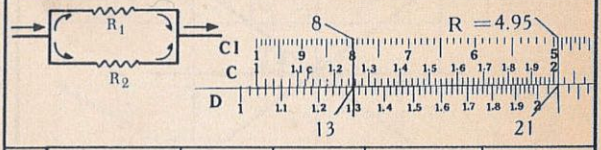
7) GUIA DE OPERACIONES. (Tablas).

Las siguientes páginas (desde la 121 hasta la 127) formarán parte de la obra "**Guía de Operaciones**", del mismo autor, las cuales, por ser de gran utilidad, se incluyen en el presente libro. Las instrucciones pueden aplicarse a reglas de cálculo con escalas trigonométricas impresas en el cuerpo principal, como la regla de cálculo de 24 escalas "Velásquez", autor de esta obra, en la cual se incluyen, para mayor facilidad en las operaciones, fórmulas de trigonometría e instrucciones para situar el punto decimal en los resultados. Esta regla, hecha en cartulina especial, tiene un valor de $ 12.00, y puede adquirirse en Horr y Choperena, Sucr., S. A., (Representantes exclusivos de Keuffel & Esser Co.), Madero 40, México, D. F.

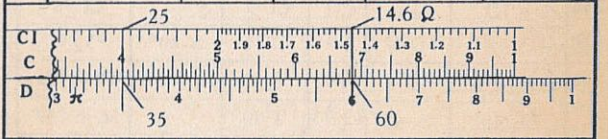
Las páginas siguientes contienen, principalmente, operaciones con cantidades complejas y conversión de éstas a vectores polares y viceversa, suma y resta de vectores (con la gráfica correspondiente), etc. Son de vital importancia en la técnica moderna: En **ELECTRICIDAD, EN RADIO - TELEVISION**, y en todos los problemas en que se aplican cantidades complejas y vectoriales.

Los dibujos de los vectores concurrentes y de las resultantes respectivas, están hechos a escala para mayor claridad.

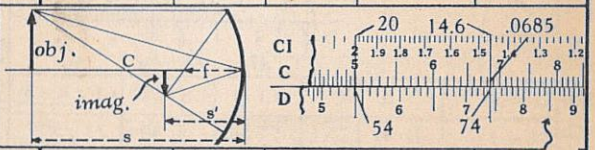
No.	OPERACION Operation	FRENTE A Opposite	PONER Set	CURSOR EN Runner to	RESPUESTA EN Answer on
145	$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$	D R_1	CI R_2	D R_1+R_2	CI
	$\frac{1}{R}=\frac{1}{13}+\frac{1}{8}$	D 13	CI 8	D $13+8=21$	$R=4.95\ \Omega$



145 A	$\frac{1}{R}=\frac{1}{35}+\frac{1}{25}$	D 35	CI 25	D 60	CI $R=14.6$



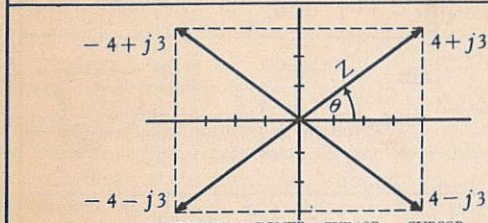
146	$\frac{1}{f}=\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}$	D s	CI s'	D $s+s'$	CI
	$\frac{1}{f}=\frac{1}{54}+\frac{1}{20}$	D 54	CI 20	D 74	$f=14.6$



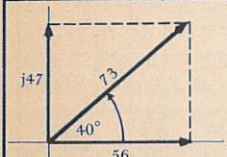
146 A	$P=\frac{1}{54}+\frac{1}{20}$	D 54	CI 20	D 74	C $P=.0685$
147	$\frac{1}{x}=\frac{1}{21}-\frac{1}{24}$	D 21	CI 24	D $24-21=3$	CI $x=168$

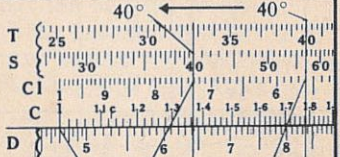
Diódoro Velásquez Gómez.
Derechos reservados conforme a la Ley.

No.	OPERACION Operation	FRENTE A Opposite	PONER Set	CURSOR Runner	CURSOR Runner	RESPUESTA Answer
	a + bi		=	a + jb		
	Vectores Polares		Z $\angle\theta$	Polar Vectors		

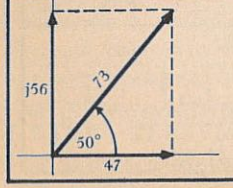


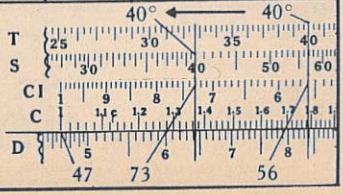
	OPERACION	FRENTE A	PONER	CURSOR	CURSOR	RESPUESTA
254	$a+jb$	D b	C 1	CI a	S = T	CI $\angle$S
a>b	56 + j 47	D 47	C 1	CI 56	S 40°	73 $\angle$40°
255	Z $\angle\theta$ < 45°	S θ	CI Z	T θ		CI + J D
	73 $\angle$40°	S 40°	CI 73	T 40°		56 + j 47





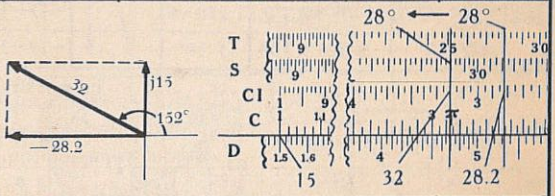
256	$a+jb$	D a	C 1	CI b	S=T	CI $\angle$90−S
a<b	47 + j 56	D 47	C 1	CI 56	S 40°	73 $\angle$50°
257	Z $\angle\theta$ >45°	S 90−θ	CI Z	T 90−θ		D + J CI
	73 $\angle$50°	S 40°	CI 73	T 40°		47 + j 56



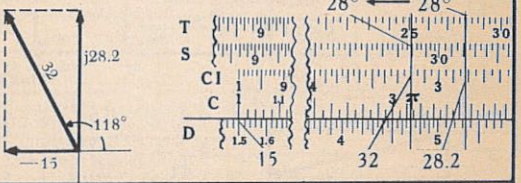


BY DIODORO VELASQUEZ G.
COPYRIGHT 1961

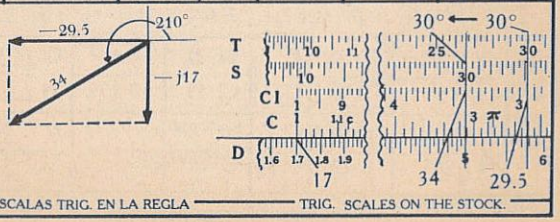
No.	OPERACION Operation	FRENTE A Opposite	PONER Set	CURSOR Runner	CURSOR Runner	RESPUESTA Answer
258	$-a+jb$	D b	C 1	CI a	S = T	CI $\angle 180-S$
a>b	$-28.2+j15$	D 15	C 1	CI 28.2	S 28°	32 $\angle 152°$
259	Z $\angle\theta$ >135°	S180−θ	CI Z	T180−θ		−CI+JD
	32 $\angle 152°$	S 28°	CI 32	T 28°		−28.2+j15



260	$-a+jb$	D a	C 1	CI b	S = T	CI $\angle 90+S$
a<b	−15+j28.2	D 15	C 1	CI28.2	S 28°	32 $\angle 118°$
261	Z $\angle\theta$ >90	S θ−90	CI Z	Tθ−90		−D+JCI
	32 $\angle 118°$	S 28°	CI 32	T 28°		−15+j28.2



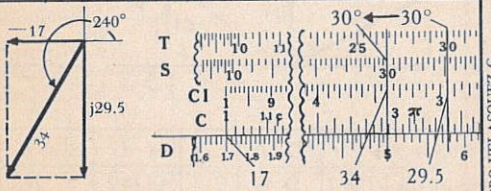
262	$-a-jb$	D b	C 1	CI a	S=T	CI $\angle 180+S$
a>b	−29.5−j17	D 17	C 1	CI 29.5	S 30°	34 $\angle 210°$



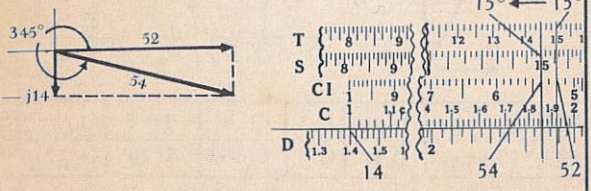
ESCALAS TRIG. EN LA REGLA — TRIG. SCALES ON THE STOCK.

Diódoro Velásquez Gómez.
Derechos reservados conforme a la Ley.

No.	OPERACION Operation	FRENTE A Opposite	PONER Set	CURSOR Runner	CURSOR Runner	RESPUESTA Answer
263	$Z\angle\theta > 180$	$S\theta - 180$	CI Z	$T0-180$		$-CI-JD$
	$34\angle 210°$	S 30°	CI 34	T 30°		$-29.5-j17$
264	$-a-jb$	D a	C 1	CI b	S=T	CI $\angle 270-S$
a<b	$-17-j29.5$	D 17	C 1	CI 29.5	S 30°	$34\angle 240°$
265	$Z\angle\theta > 225$	$S270-\theta$	CI Z	$T270-\theta$		$-D-JCI$
	$34\angle 240°$	S 30°	CI 34	T 30°		$-17-j29.5$



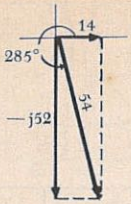
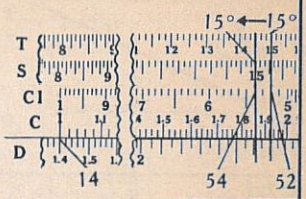
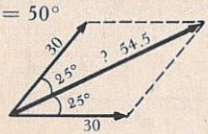
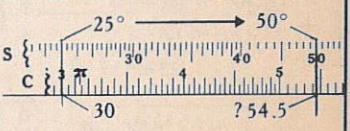
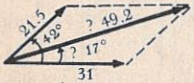
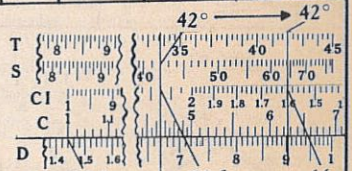
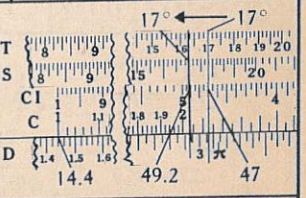
266	$a-jb$	D b	C 1	CI a	S=T	CI $\angle 360-S$
a>b	$52-j14$	D 14	C 1	CI 52	S 15°	$54\angle 345°$
267	$Z\angle\theta > 315$	$S360-\theta$	CI Z	$T360-\theta$		CI − JD
	$54\angle 345°$	S 15°	CI 54	T 15°		$52-j14$



268	$a-jb$	D a	C 1	CI b	S=T	CI $\angle 270+S$
a<b	$14-j52$	D 14	C 1	CI 52	S 15°	$54\angle 285°$
269	$Z\angle\theta > 270$	$S\theta - 270$	CI Z	$T\theta-270$		$D-jCI$
	$54\angle 285°$	S 15°	CI 54	T 15°		$14-j52$

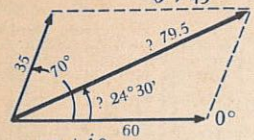
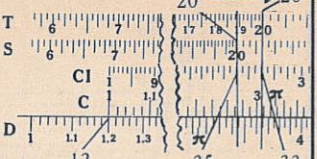
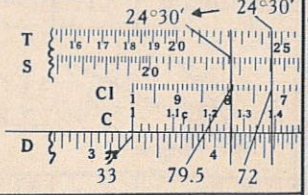
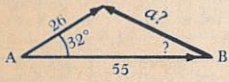
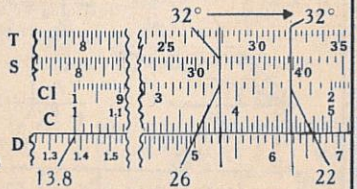
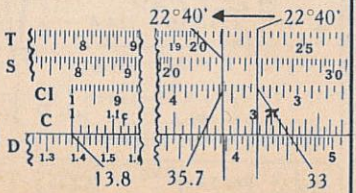
ESCALAS TRIG. EN LA REGLA — TRIG. SCALES ON THE STOCK.

BY DIODORO VELASQUEZ G.
COPYRIGHT 1961

No.	OPERACION Operation	FRENTE A Opposite	PONER Set	CURSOR Runner	CURSOR Runner	RESPUESTA Answer
						
270	*rombo*	S 25°	C 30	S 50°		C = 54.5
	$\theta = 50°$ 					
271	$21.5\angle\underline{42°}$	S 42°	CI 21.5	T 42°		CI + JD 16 + j14.4
	$31\angle\underline{0°} + 21.5\angle\underline{42°}$ $\theta < 45°$  $+ \begin{matrix} 31 + j0 \\ 16 + j14.4 \end{matrix}$					
271 A	$47 + j14.4$	D 14.4	C 1	CI 47	S=T=17°	CI $\angle$ S $= 49.2\angle\underline{17°}$
	$31\angle\underline{0°} = 31 + j0$ $+ \ 21.5\angle\underline{42°} = 16 + j14.4$ $47 + j14.4$ $49.2\angle\underline{17°}$					
272	$35\angle\underline{70°} > 45$	S 90 − θ = 20°	CI 35	T 20°		D + J CI = 12 + j 33

ESCALAS TRIG. EN LA REGLA TRIG. SCALES ON THE STOCK.

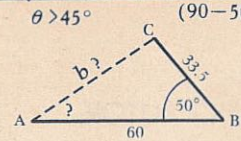
Dioloro Velásquez Gómez.
Derechos reservados conforme a la Ley.

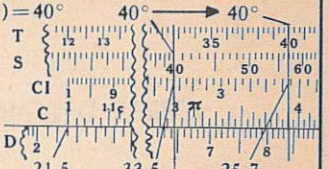
No.	OPERACION Operation	FRENTE A Opposite	PONER Set	CURSOR Runner	CURSOR Runner	RESPUESTA Answer
	$\theta > 45°$  $60+j0$ $+\ 12+j33$					
272 A	$72+j33$	D 33	C 1	CI 72	S = T S=24°30'	CI $\angle$ S 79.5 $\angle$ 24°30'
	$60\ \angle 0° = 60+j0$ $+\ 35\ \angle 70° = 12+j33$ $72+j33$ $79.5\ \angle 24°30'$					
273	$26\ \angle 32°$	S 32°	CI 26	T 32°		CI + JD $22+j13.8$
	$\theta < 45°$ 					
273 A	$33-j13.8$	D 13.8	C 1	CI 33	S = T S=22°40'	CI $\angle$ S 35.7 $\angle$ 22°40'
	$55\ \angle 0° = 55+j0$ $-\ 26\ \angle 32° = 22+j13.8$ $33-j13.8$ $a? = 35.7$ $\angle B? = 22°40'$					

ESCALAS TRIG. EN LA REGLA TRIG. SCALES ON THE STOCK.

BY DIODORO VELASQUEZ G.
COPYRIGHT 1961

No.	OPERACION Operation	FRENTE A Opposite	PONER Set	CURSOR Runner	CURSOR Runner	RESPUESTA Answer
274	$33.5\angle 50^{\circ}$	S 40°	CI 33.5	T 40°		D + J CI $21.5+j25.7$





274 A	$38.5-j25.7$	D 25.7	C 1	CI 38.5	S=T =33°40'	CI $\angle$S $46.3/33^{\circ}40'$

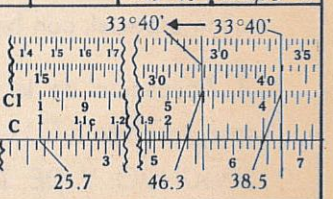
$60\angle 0^{\circ} = 60 + j0$

$-\ 33.5\angle 50^{\circ} = 21.5 + j25.7$

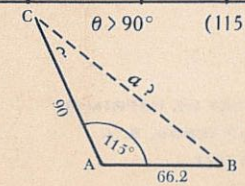
$38.5 - j25.7$

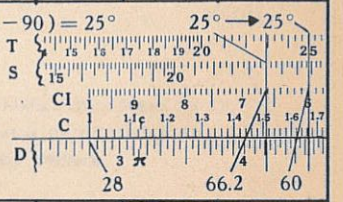
b? = 46.3

$\angle$A? = 33°40'



275	$66.2\angle 115^{\circ}$	S 25°	CI 66.2	T 25°		D + J CI $28+j60$





275 A	$118+j60$	D 60	C 10	CI 118	S = T = 27°	CI $\angle$S $132/27^{\circ}$

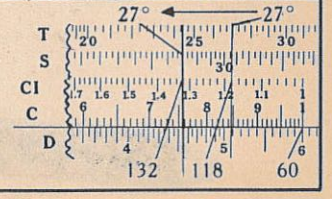
$90\angle 0^{\circ} = 90 + j0$

$+\ 66.2\angle 115^{\circ} = 28 + j60$

$118 + j60$

a? = 132

$\angle$C? = 27°



Diódoro Velásquez Gómez.
Derechos reservados conforme a la Ley.

OBRAS DEL MISMO AUTOR:

1. Regla de cálculo de 24 escalas como el modelo de la portada, hecha en cartulina especial, con barniz de plástico.

2. Aplicación de las reglas de cálculo para resolver ECUACIONES DE SEGUNDO Y DE TERCER GRADOS, con suficientes ejemplos, ejercicios y dibujos.

ESTE LIBRO SE TERMINO DE IMPRIMIR
EN ETIQUETAS E IMPRESOS, S. A.
ENERO DE 1961.